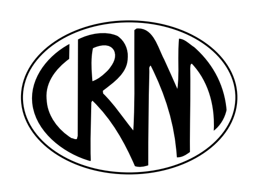
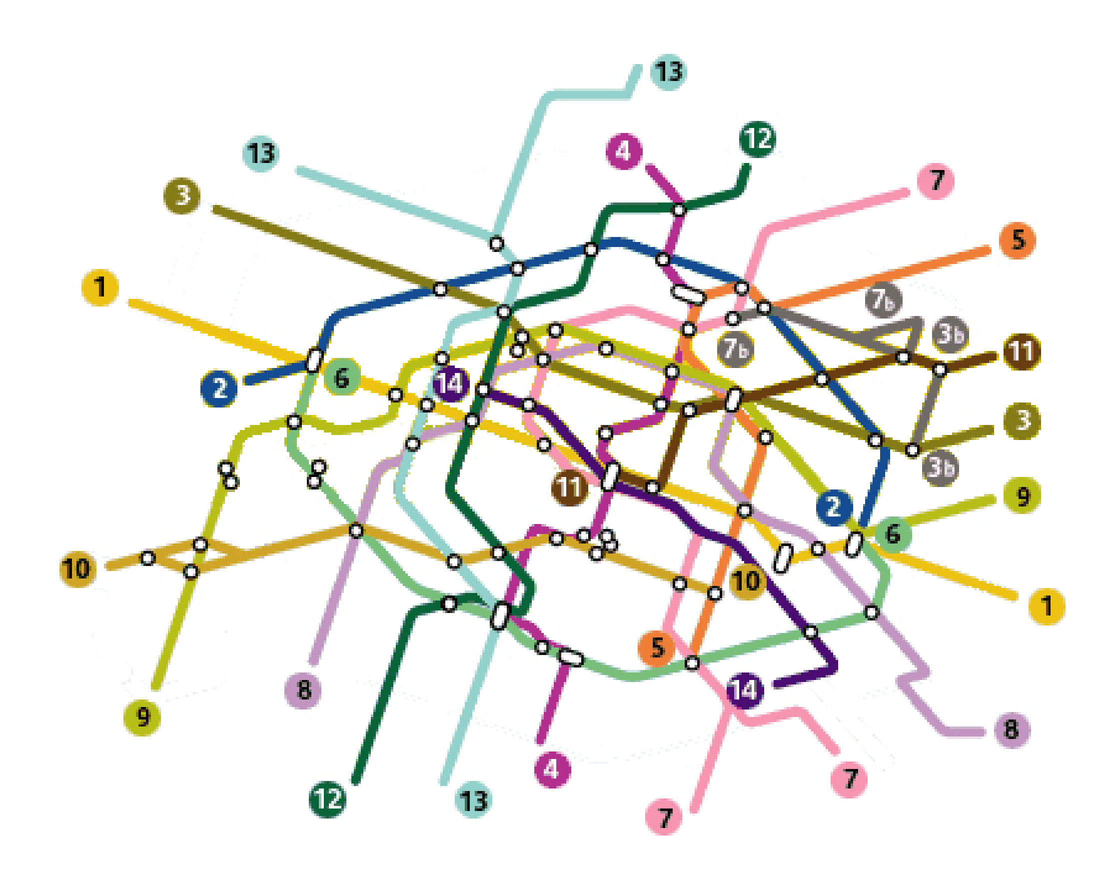


Cahiers de la CRM

Introduction à la théorie des graphes

Didier Müller



Cahier n° 6 Commission Romande de Mathématique

Table des matières

Avant-propos

La mise en oeuvre du RRM a nécessité certains ajustements des programmes de mathématiques enseignés dans les gymnases de Suisse romande. La Commission Romande de Mathématique (CRM) tient à proposer des moyens d'enseignement conformes aux exigences du règlement de maturité. Aussi ses membres s'emploient-ils depuis plusieurs années à la mise à jour de sa collection « Ouvrages collectifs » qui couvrent en priorité les besoins du programme de niveau standard.
Certaines notions généralement étudiées dans les cours de mathématiques de niveau renforcé ont été volontairement retirées des ouvrages de base. En outre, l'introduction des options spécifiques a ouvert de nouveaux horizons quant aux sujets de mathématiques abordés. Soucieuse de tenir compte de cette évolution, la CRM proposait en 2004 les deux premiers ouvrages d'une nouvelle collection, les Cahiers de la CRM.
Ce cahier, le sixième de la série, parle des graphes, un sujet inhabituel dans les cours traditionnels de mathématiques et qui s'intègre parfaitement bien dans une Option Spécifique ou dans une Option Complémentaire.
La CRM est heureuse de présenter aujourd'hui un ouvrage sortant des sentiers battus :

« Introduction à la théorie des graphes »
de Didier Müller

Les ouvrages publiés ces dernières années par la CRM sont marqués par le souci d'être accessibles à la lecture individuelle des élèves. J'espère qu'il en ira de même pour cet ouvrage et que vous aurez grand plaisir à vous plonger dans ce monde fascinant des graphes.
Tous mes remerciements à Didier Müller pour s'être lancé dans l'aventure de la publication d'un cahier, ainsi qu'aux membres de la CRM qui ont consacré de leur temps à une lecture finale minutieuse.

Patrick Hochuli
Président de la CRM
Décembre 2011

But de ce fascicule

Le but de ce fascicule est d'initier les lycéens à la théorie des graphes.
Je n'ai pas pour ambition de faire une théorie complète, mais de montrer comment les graphes peuvent être une méthode de résolution de problèmes intéressante.
Ce cours se veut accessible aux élèves de lycée, car il ne demande pratiquement pas de connaissances préalables. Il est découpé en deux parties principales : les graphes non orientés et les graphes orientés.
Comme la théorie des graphes utilise un jargon bien particulier, le début du cours comporte beaucoup de définitions. C'est un peu rébarbatif, mais indispensable pour la suite. Un index et un lexique en fin de fascicule aideront l'élève à assimiler ces termes.
Les exercices sont essentiellement de deux types :

– Des exercices théoriques sur les graphes, qui sont souvent des démonstrations assez simples, généralement par induction, ou par l'absurde ; il y a aussi des exercices de réflexion qui permettent de se rendre compte si on a bien compris un concept ou non.
– Des exercices pratiques où il peut être avantageux d'utiliser des graphes pour modéliser et résoudre un problème.

Corrigés des exercices

Par manque de place dans ce fascicule, les corrigés des exercices sont disponibles gratuitement sur le site www.nymphomath.ch/graphes. L'internaute trouvera également sur ce site quelques applets pour illustrer certains concepts.

Logiciels pour les graphes

Le logiciel gratuit **Grin 4.0** (pour Windows) permet entre autres de :
- dessiner des graphes
- produire la matrice d'adjacences d'après le dessin
- colorer des graphes
- trouver le plus court chemin dans un graphe
- trouver les cycles eulériens et hamiltoniens

Bref, ce logiciel est un complément idéal à ce cours ! Il a été écrit par Vitali **Petchenkine** et est disponible à l'adresse web : www.nymphomath.ch/graphes/logiciel/ (la page officielle de ce programme a disparu du web).

Mathematica permet aussi de travailler avec les graphes. Voir [5] dans la bibliographie.

Pour aller plus loin

Pour en savoir beaucoup plus sur les graphes, voici quelques livres que j'ai utilisés, classés du plus simple au plus complet :
- Alain Hertz propose une initiation aux graphes sous forme d'énigmes policières [3]. Cela illustre bien comment les graphes peuvent être utiles pour modéliser des problèmes.
- *Théorie des graphes* [1] donne une base solide, tout en restant accessible au plus grand nombre. Très agréable à lire. Un regret : pas d'exercices.
- *Les graphes par l'exemple* [2] est comme [1] accessible à des lycéens, mais il contient en plus des exercices corrigés.
- *Introduction to graph theory* [6] est très complet, mais d'un niveau universitaire et en anglais.
- *Graphes et algorithmes* [4] est un indémodable, de niveau universitaire et malheureusement très cher.

Didier Müller

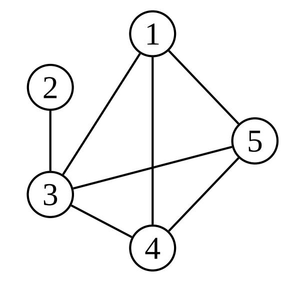
1 Graphes non orientés

1.1 Premières définitions

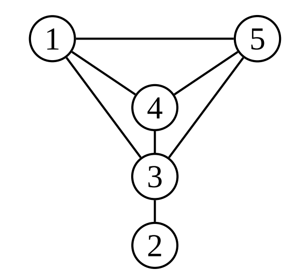
Un **graphe** fini $G=(V,E)$ est défini par l'ensemble fini $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets** (*Vertices* en anglais), et par l'ensemble fini $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arêtes** (*Edges* en anglais).
Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de e. Si l'arête e relie les sommets a et b, on dira que ces sommets sont **adjacents**, ou **incidents** avec e, ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets a et b.
On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe.

1.1.1 Représentation graphique

Les graphes tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. À chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Il existe donc une infinité de représentations d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans qu'aucune arête n'en coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes), on dit que G est **planaire**. Le graphe G ci-dessus est planaire.



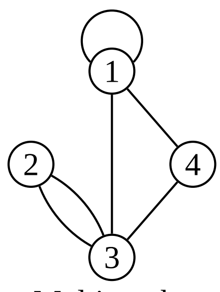

Une représentation non planaire du graphe G (des arêtes se croisent)



Une représentation planaire de G

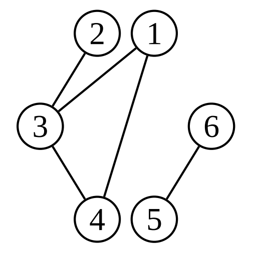
1.1.2 Quelques types de graphes

Un graphe est **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet. On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appelera ces graphes des **multigraphes**.



Multigraphe

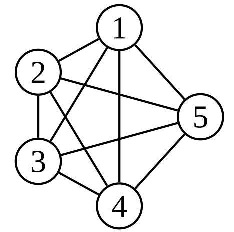
Un graphe est **connexe** s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en **composantes connexes**. Sur le graphe ci-dessous, les composantes connexes sont $\{1,2,3,4\}$ et $\{5,6\}$.



Graphe non connexe

$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$E = \big\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\}\big\}$$

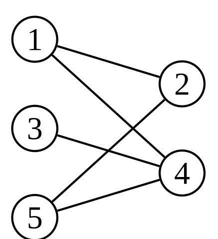
Un graphe est **complet** si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.



Graphe complet K_5

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\big\}$$

Un graphe est **biparti** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y (dans l'exemple ci-dessous, on a $X = \{1,3,5\}$ et $Y = \{2,4\}$, ou vice versa).



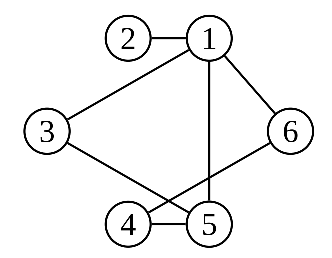
Graphe biparti

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \big\{\{1,2\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\}\big\}$$

1.1.3 Exemple d'utilisation d'un graphe pour résoudre un problème

On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant. Deux wagons i et j peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.
Dessinez un graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe. Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

Solution
On représente les wagons par les sommets. Une arête relie deux sommets i et j si les wagons i et j ne peuvent pas être sur la même voie. On obtient le graphe ci-contre.



On voit que 1, 3 et 5 ne peuvent pas être sur la même voie. Il faut donc trois voies au minimum.

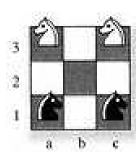
Exercice 1
Trois professeurs P_1, P_2, P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C_1, C_2, C_3 :
P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1, 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3.
Comment représenter cette situation par un graphe ? Quel type de graphe obtenez-vous ?
Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

Exercice 2
Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
Quel type de graphe obtenez-vous ?
Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Exercice 3
Sur un échiquier 3×3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3.

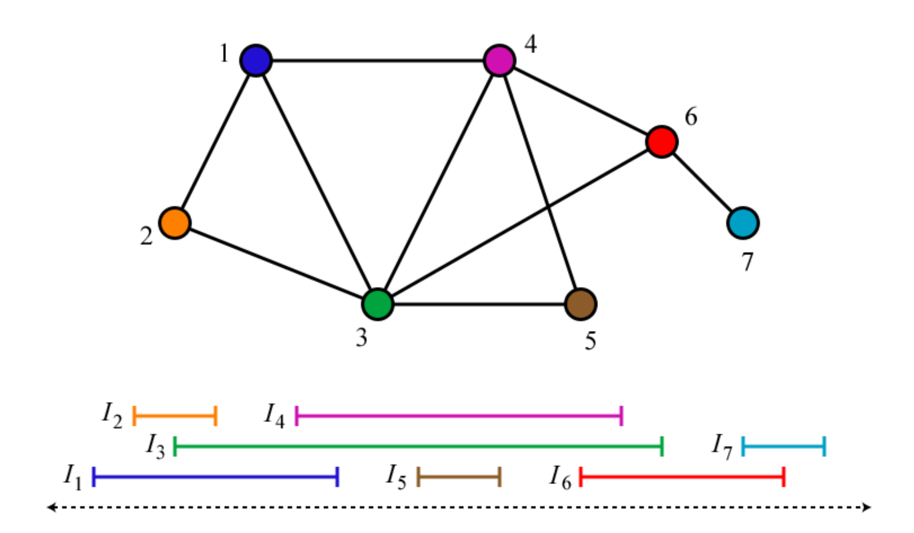


Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa. Les blancs commencent.



1.1.4 Graphes d'intervalles

On construit un graphe G à partir des intervalles de la droite réelle $I_1, \ldots, I_n$, où les sommets de G sont numérotés de 1 à n. Dans un **graphe d'intervalles**, il existe une arête entre les sommets i et j, $i \neq j$, si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \varnothing$.



Autrement dit, deux sommets sont reliés si et seulement si les deux intervalles correspondants se chevauchent.

Exercice 4

Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge ***Qui a tué le Duc de Densmore*** *(Bibliothèque Oulipienne n° 67, 1994, Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier grâce à un théorème combinatoire dû au mathématicien hongrois G. Hajós.*

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.

À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?

Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :

Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.

Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.

Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.

Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.

Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.

Georgia a rencontré Ann et Helen.

Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :

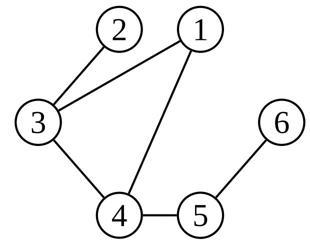
– Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine d'une façon unique l'assassin.

Qui est l'assassin ?

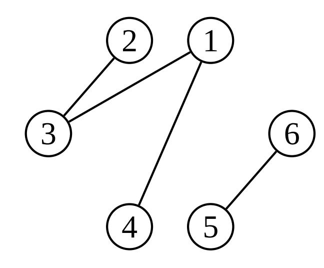
1.2 Graphe partiel et sous-graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe $G' = (V, E')$ est un **graphe partiel** de G, si E' est inclus dans E. Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

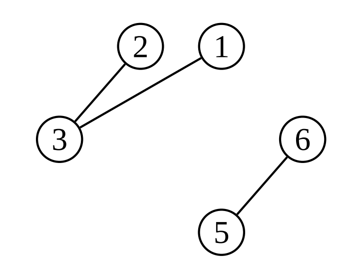
Pour un sous-ensemble de sommets A inclus dans V, le **sous-graphe** de G induit par A est le graphe $G = \big(A, E(A)\big)$ dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arêtes $E(A)$ est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans A. Autrement dit, on obtient G' en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.



Graphe G



Graphe partiel de G



Sous-graphe de G

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \big\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\big\}$

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \big\{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\big\}$

$V = \{1,2,3,5,6\}$

$E = \big\{\{1,3\},\{2,3\},\{5,6\}\big\}$

Un graphe partiel d'un sous-graphe est un **sous-graphe partiel** de G. On appelle **clique** un sous-graphe complet de G. Dans le graphe G ci-dessus, le sous-graphe $K = (V,E)$, avec $V = \{1,3,4\}$ et $E = \big\{\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}\big\}$ est une clique.

Exercice 5
Montrez que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).
Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

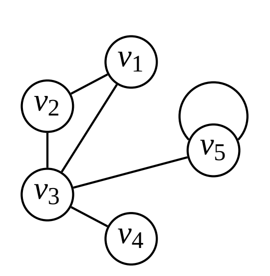
1.3 Degrés

1.3.1 Degré d'un sommet

On appelle **degré** du sommet v, et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
Attention ! Une boucle sur un sommet compte double.
Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage).

Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés :

$$d(v_1) = 2$$
$$d(v_2) = 2$$
$$d(v_3) = 4$$
$$d(v_4) = 1$$
$$d(v_5) = 3$$

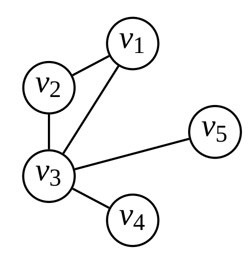


Théorème 1.1 (Lemme des poignées de mains)
La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Exercice 6
Démontrez le lemme des poignées de mains.

1.3.2 Degré d'un graphe

Le **degré d'un graphe** est le degré maximum de tous ses sommets. Dans l'exemple ci-dessous, le degré du graphe est 4, à cause du sommet v_3.



Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit **régulier**. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Exercice 7
Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 8
Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents.

Exercice 9
Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice 10
On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !

Exercice 11
Une suite décroissante (au sens large) d'entiers est graphique s'il existe un graphe simple dont les degrés des sommets correspondent à cette suite. Par exemple, un triangle correspond à la suite (2, 2, 2). Les suites suivantes sont-elles graphiques ?

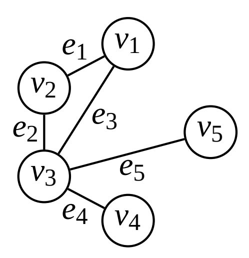
1) (3, 3, 2, 1, 1)
2) (3, 3, 1, 1)
3) (3, 3, 2, 2)
4) (4, 2, 1, 1, 1, 1)
5) (5, 3, 2, 1, 1, 1)
6) (5, 4, 3, 1, 1, 1, 1)

Trouvez deux graphes correspondant à la suite (3, 2, 2, 2, 1).

1.4 Chaînes et cycles

Une **chaîne** dans G, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.

On dira que la chaîne **relie** le premier sommet de la suite au dernier sommet. En plus, on dira que la chaîne a pour longueur le nombre d'arêtes de la chaîne.
Le graphe ci-dessous contient entre autres les chaînes $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$ et $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$.



On ne change pas une chaîne en inversant l'ordre des éléments dans la suite correspondante. Ainsi, les chaînes $(v_1, e_3, v_3, e_4, v_4)$ et $(v_4, e_4, v_3, e_3, v_1)$ sont identiques.

Exercice 12
Dans certains livres, on définit une chaîne comme une suite de sommets. Pour quel type de graphe cette définition n'est-elle pas adéquate ?

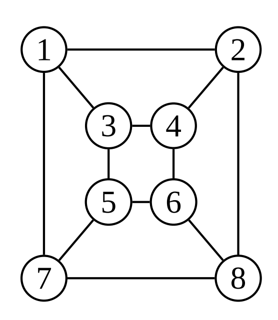
On appelle **distance** entre deux sommets la longueur de la plus petite chaîne les reliant.
On appelle **diamètre** d'un graphe la plus longue des distances entre deux sommets.
Une chaîne est **élémentaire** si chaque sommet y apparaît au plus une fois.
Une chaîne est **simple** si chaque arête apparaît au plus une fois. Dans le graphe précédent, $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$ est une chaîne simple et élémentaire.
Une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes est appelée chaîne **fermée**. Dans le graphe précédent, $(v_4, e_4, v_3, e_5, v_5, e_5, v_3, e_4, v_4)$ est une chaîne fermée.
Une chaîne fermée simple est appelée **cycle**. Dans le graphe précédent, la chaîne $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1)$ est un cycle.

Exercice 13
Quels sont les graphes de diamètre 1 ?

Théorème 1.2
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Exercice 14
Démontrez le théorème 1.2.

Exercice 15
Montrez que ce graphe est biparti :



Théorème 1.3
Pour un graphe G ayant m arêtes, n sommets et p composantes connexes, on définit :

$$\nu(G) = m - n + p$$

$\nu(G)$ est appelé le nombre **cyclomatique**. Prononcer « nu de G ».

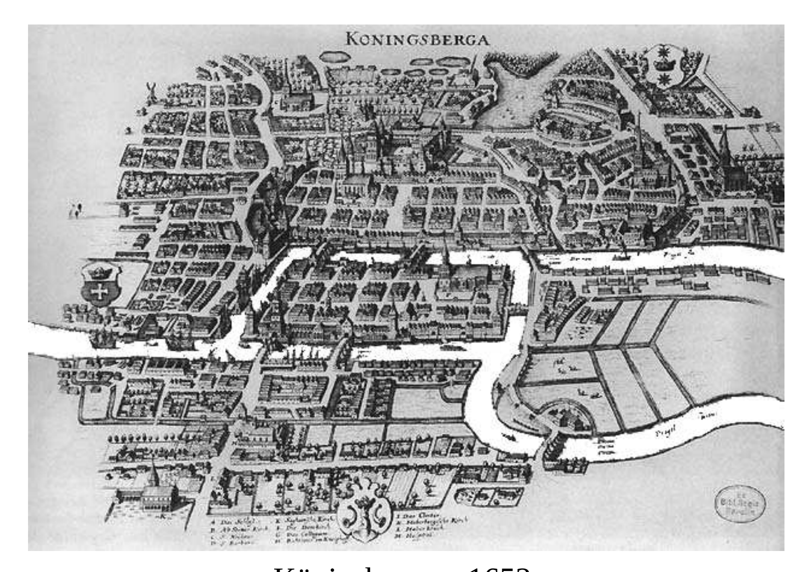
On a $\nu(G) \geqslant 0$ pour tout graphe G.
De plus, $\nu(G) = 0$ si et seulement si G est sans cycle.

Exercice 16
Démontrez le théorème 1.3.

1.5 Graphes eulériens

On appelle **cycle eulérien** d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un cycle eulérien.
On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est **semi-eulérien**.
Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Exercice 17
Cet exercice est un des problèmes fondateurs de la théorie des graphes, proposé par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1736.
En 1652, la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) possède sept ponts enjambant la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof.

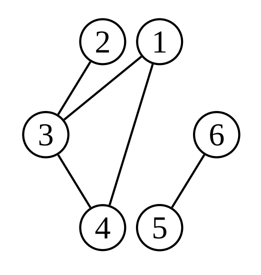


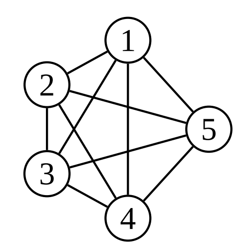
Königsberg en 1652

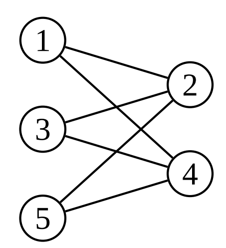
Au cours d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ?

Exercice 18
Donnez un critère permettant de dire à coup sûr si un graphe est eulérien.

Exercice 19
Les graphes suivants sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?

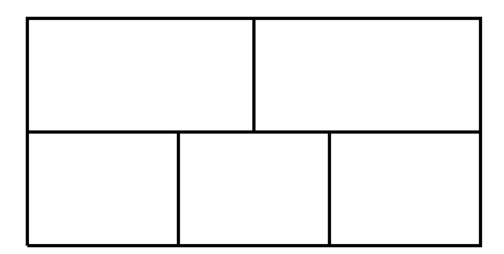






Exercice 20
Soit G un graphe non eulérien. Est-il toujours possible de rendre G eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Exercice 21
Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Exercice 22
On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

1) En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
2) Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3) Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
4) Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

1.6 Graphes hamiltoniens

On appelle **cycle hamiltonien** d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.
On appelle **chaîne hamiltonienne** d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est **semi-hamiltonien**.
Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-)hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

– un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;
– si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;
– les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème 1.4 (Ore)
Soit G un graphe simple d'ordre $n \geqslant 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geqslant n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire 1.5 (Dirac)
Soit G un graphe simple d'ordre $n \geqslant 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geqslant \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.

En effet, un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent, car si x et y ne sont pas adjacents, on a bien : $d(x) + d(y) \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

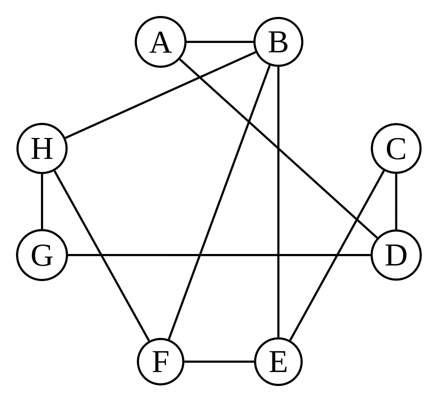
Exercice 23
Dessinez un graphe d'ordre au moins 5 qui est. . .

1) hamiltonien et eulérien
2) hamiltonien et non eulérien
3) non hamiltonien et eulérien
4) non hamiltonien et non eulérien.

Exercice 24
Un club de 9 joueurs se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Une règle du club interdit qu'un joueur ait deux fois la même personne à côté de lui.

1) Combien de jours au maximum pourront-ils se réunir en satisfaisant cette règle ?
2) Donnez une organisation de la table pour chacun de ces jours.
3) Même question que 1), mais avec 3 tables de 3 places.
4) Donnez une organisation des trois tables pour chacun de ces jours.

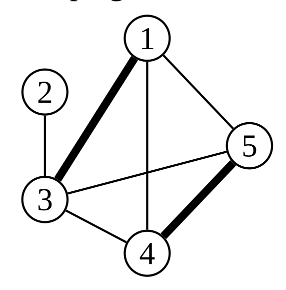
Exercice 25
Huit personnes se retrouvent pour un repas de mariage. Le graphe ci-dessous précise les incompatibilités d'humeur entre ces personnes (une arête reliant deux personnes indique qu'elles ne se supportent pas).



Proposez un plan de table (la table est ronde) en évitant de placer côte à côte deux personnes incompatibles.

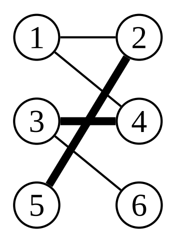
1.7 Couplages

Soit G un graphe simple. Un **couplage** C de G est un sous-graphe partiel 1-régulier de G. On peut aussi dire qu'un couplage (ou appariement) est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes.
Un sommet v est **saturé** par un couplage C si v est l'extrémité d'une arête de C. Dans le cas contraire, v est **insaturé**.
Un **couplage maximum** est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes. Un graphe peut posséder plusieurs couplages maximum.

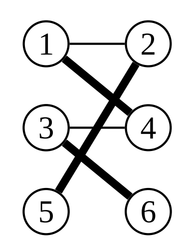


En gras, un couplage maximum de G. Les sommets 1, 3, 4 et 5 sont saturés.

Un **couplage parfait** est un couplage où chaque sommet du graphe est saturé.



Un couplage



Un couplage maximum et parfait

1.7.1 Calcul d'un couplage maximum

Si C est un couplage de G, on appelle **chaîne alternée** une chaîne élémentaire de G dont les arêtes sont alternativement dans C et hors de C.
Une chaîne alternée est dite **augmentante** si elle relie deux sommets insaturés. Ci-dessus, à gauche, la chaîne 1-4-3-6 est augmentante. En « intervertissant les épaisseurs » des arêtes le long de cette chaîne, on obtient un meilleur couplage (ci-dessus, à droite).

Théorème 1.6 (Berge, 1957)
Un couplage C est maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne augmentante relativement à C.

Exercice 26
Une assemblée est formée de personnes parlant plusieurs langues différentes (voir tableau ci-après). On veut former des binômes de personnes qui pourront dialoguer entre elles.
Comment maximiser le nombre de binômes ?

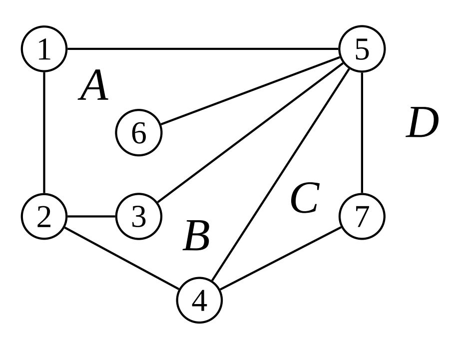
	Allemand	Anglais	Arabe	Chinois	Français	Espagnol	Russe
Alfred				✘	✘		
Bernard	✘					✘	
Claude					✘	✘	
Denis	✘						
Ernest		✘					
Fabien		✘			✘		✘
Georges		✘			✘		
Henri			✘	✘		✘	
Isidore					✘		✘
Joseph		✘	✘				
Kurt	✘	✘					
Louis							✘

Exercice 27
Une entremetteuse essaie de former le plus de couples possible avec 6 filles et 6 garçons en fonction de critères esthétiques et de compatibilité d'humeur. Elle a dressé le tableau d'incompatibilités ci-après, où une croix indique que deux personnes sont incompatibles. Combien de couples pourra-t-elle former au maximum ?

	Anne	Béatrice	Carine	Drew	Eléonore	Florie
Alfred	✘	✘		✘	✘	
Bernard						✘
Claude	✘			✘	✘	✘
Denis	✘				✘	✘
Ernest		✘	✘			
Fabien	✘		✘	✘	✘	

1.8 Graphes planaires

On dit qu'un graphe est **planaire** si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. Rappelons que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
Une **carte**, ou graphe **planaire topologique**, est une représentation particulière d'un multigraphe planaire fini. On dit qu'une carte est connexe si son graphe l'est. Une carte divise le plan en plusieurs régions.
Par exemple, la carte ci-dessous, avec sept sommets et neuf arêtes, divise le plan en quatre régions (A, B, C, D). Trois régions sont limitées alors que la quatrième (D), extérieure au diagramme, ne l'est pas.



Le **degré d'une région** r, noté $d(r)$, est la longueur de la chaîne fermée minimum passant par tous les sommets qui délimitent cette région. Dans le graphe ci-dessus, $d(A) = 6$ (la région A est délimitée par la chaîne fermée passant par les sommets $(1,2,3,5,6,5,1)$), $d(B) = 4, d(C) = 3$ et $d(D) = 5$.
On remarque que toute arête limite deux régions, ou est contenue dans une région et est alors comptée deux fois dans la chaîne fermée. Nous avons donc un lemme pour les régions, analogue au lemme des poignées de mains pour les sommets.

Théorème 1.7
La somme des degrés des régions d'une carte connexe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

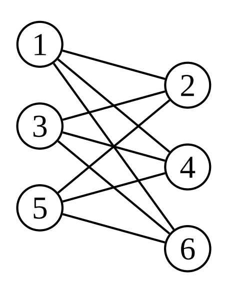
On peut vérifier ce théorème sur le graphe précédent : il comporte 9 arêtes et la somme des degrés des régions vaut 18.

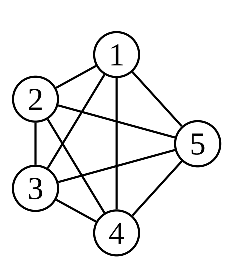
Théorème 1.8 (Euler, 1752)
Euler a établi une formule célèbre qui relie le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A et le nombre de régions R d'une carte connexe :

$$S - A + R = 2$$

Exercice 28
Démontrez le théorème d'Euler en procédant par récurrence sur les sommets.

Théorème 1.9 (Kuratowski, 1930)
Un graphe est non planaire si et seulement s'il contient un sous-graphe homéomorphe (voir lexique) au graphe biparti $K_{3,3}$ ou au graphe complet K_5.





Exercice 29
Utilisez le théorème d'Euler pour démontrer que le graphe biparti $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

1.9 Représentations non graphiques d'un graphe

1.9.1 Matrice d'adjacences

On peut représenter un graphe simple par une **matrice d'adjacences**. Une matrice $(n \times m)$ est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de

la colonne j. Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.
3. Elle est symétrique : $m_{ij} = m_{ji}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre graphe.

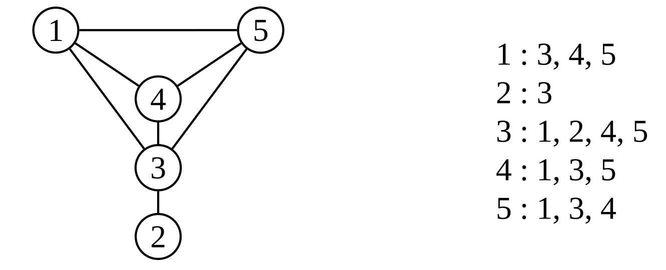
Exercice 30

On a calculé ci-dessous les matrices M^2 et M^3 (M est la matrice ci-dessus). Pour chacune de ces matrices, à quoi correspondent les nombres obtenus ?

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 6 & 8 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

1.9.2 Listes d'adjacences

On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les **listes d'adjacences**.



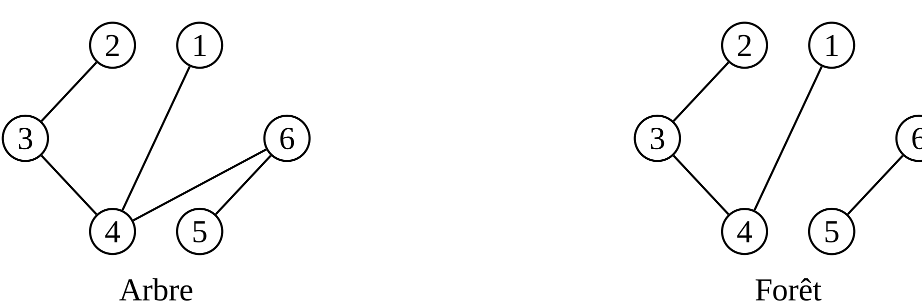
1 : 3, 4, 5
2 : 3
3 : 1, 2, 4, 5
4 : 1, 3, 5
5 : 1, 3, 4

Exercice 31

Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences et des listes d'adjacences.

1.10 Arbres

On appelle **arbre** tout graphe connexe sans cycle. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé une **forêt**.
Une **feuille** ou **sommet pendant** est un sommet de degré 1.



Arbre
Les sommets 1, 2 et 5 sont les feuilles

Forêt
Les sommets 1, 2, 5 et 6 sont les feuilles

Théorème 1.10
Les affirmations suivantes sont équivalentes pour tout graphe G à n sommets.

1. G est un arbre,
2. G est sans cycle et connexe,
3. G est sans cycle et comporte $n-1$ arêtes,
4. G est connexe et comporte $n-1$ arêtes,
5. chaque paire u, v de sommets distincts est reliée par une seule chaîne simple (et le graphe est sans boucle).

Exercice 32
Démontrez le théorème 1.10. Pour cela, utilisez le théorème 1.3.

Théorème 1.11
Tout arbre fini avec au moins deux sommets comporte au moins deux sommets pendants.

Exercice 33
Démontrez le théorème 1.11.

Exercice 34
Combien d'arbres différents existe-t-il avec 5 sommets ? avec 6 sommets ? avec 7 sommets ?

Exercice 35
Démontrez qu'un arbre a au plus un couplage parfait. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un arbre T ait un couplage parfait ?

1.10.1 Codage de Prüfer

Le codage de Prüfer (1918) est une manière très compacte de décrire un arbre. Il a été proposé par le mathématicien allemand Ernst Paul Heinz Prüfer (1896-1934).

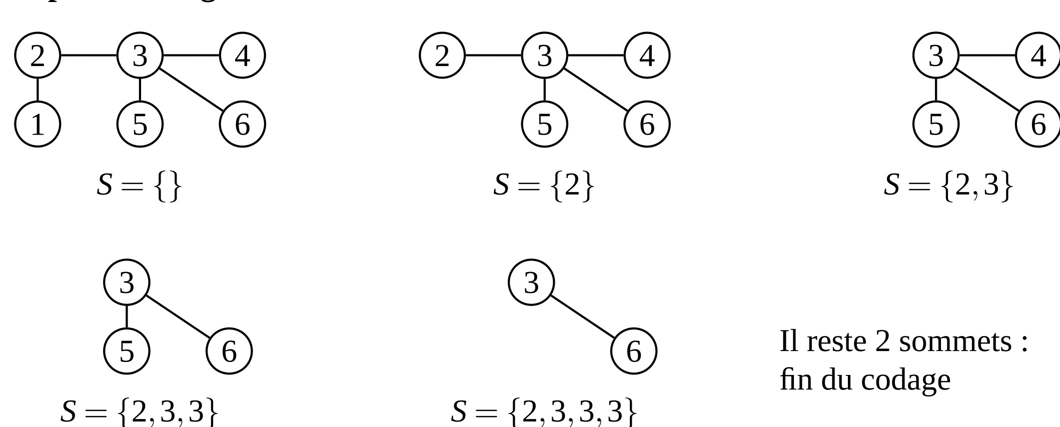
Codage

Soit l'arbre $T = (V, E)$ et supposons $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
L'algorithme ci-dessous fournira le code de T, c'est-à-dire une suite S de $n-2$ termes employant (éventuellement plusieurs fois) des nombres choisis parmi 1, …, n.

Pas général de l'algorithme de codage
(à répéter tant qu'il reste plus de deux sommets dans l'arbre T)

1. identifier la feuille v de l'arbre ayant le numéro minimum ;
2. ajouter à la suite S le seul sommet s adjacent à v dans l'arbre T ;
3. enlever de l'arbre T le sommet v et l'arête incidente à v.

Exemple de codage



Décodage

Donnée : suite S de $n-2$ nombres, chacun provenant de $\{1, \ldots, n\}$.
Posons $I = \{1, \ldots, n\}$.

Pas général de l'algorithme de décodage
(à répéter tant qu'il reste des éléments dans S et plus de deux éléments dans I)

1. identifier le plus petit élément i de I n'apparaissant pas dans la suite S ;
2. relier par une arête de T le sommet i avec le sommet s correspondant au premier élément de la suite S ;
3. enlever i de I et s de S.

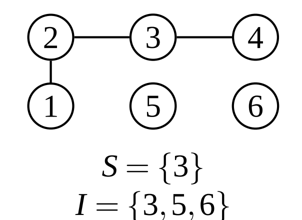
Les deux éléments qui restent dans I à la fin de l'algorithme constituent les extrémités de la dernière arête à ajouter à T.

Exemple de décodage

$S = \{2, 3, 3, 3\}$
$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

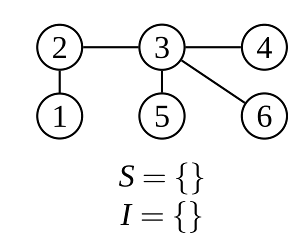
$S = \{3, 3, 3\}$
$I = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$S = \{3, 3\}$
$I = \{3, 4, 5, 6\}$



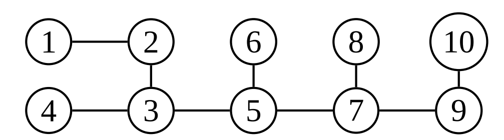
$S = \{3\}$
$I = \{3, 5, 6\}$

$S = \{\}$
$I = \{3, 6\}$



$S = \{\}$
$I = \{\}$

Exercice 36
Trouvez le codage de Prüfer de l'arbre ci-dessous.

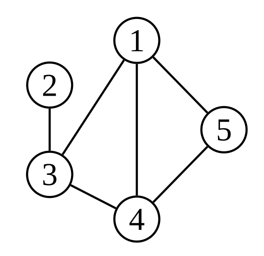


Exercice 37
Dessinez l'arbre correspondant à la suite $S = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

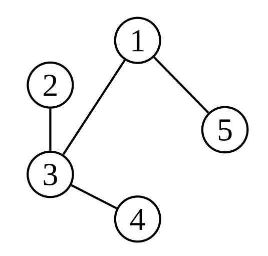
Théorème 1.12 (Cayley, 1857)
Le nombre d'arbres que l'on peut construire sur n ($n \geq 2$) sommets numérotés est égal à n^{n-2}.

Exercice 38
Démontrez le théorème 1.12. Utilisez le codage de Prüfer.

1.11 Arbres couvrants



Graphe G



Un arbre couvrant

Un **arbre couvrant** (aussi appelé arbre maximal) est un graphe partiel qui est aussi un arbre.

Exercice 39
Combien d'arbres couvrants différents le graphe G ci-dessus possède-t-il ?

1.11.1 Arbre couvrant de poids minimum

Soit le graphe $G=(V,E)$ avec un poids associé à chacune de ses arêtes. On veut trouver, dans G, un arbre maximal $A=(V,F)$ de poids total minimum.

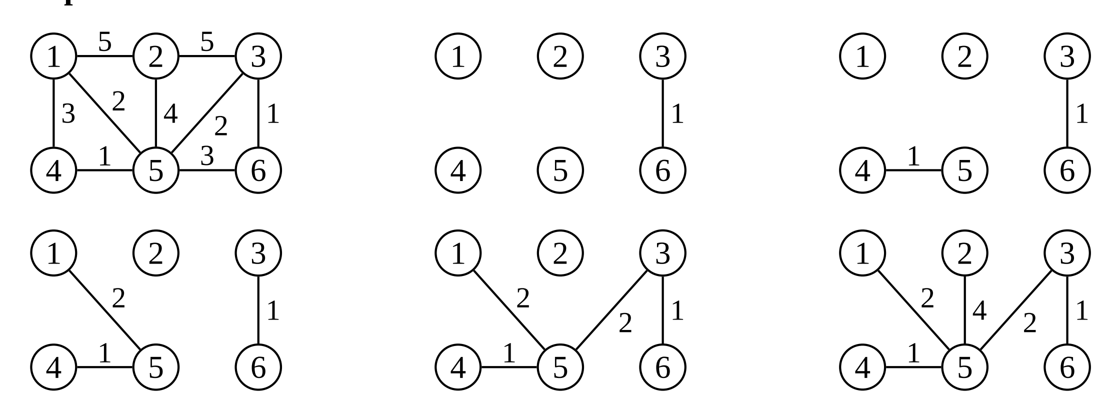
Algorithme de Kruskal (1956)
Données :
– Graphe $G=(V,E)$ ($|V|=n$, $|E|=m$)
– Pour chaque arête e de E, son poids $c(e)$.
Résultat : Arbre ou forêt maximale $A=(V,F)$ de poids minimum.

Trier et renuméroter les arêtes de G dans l'ordre croissant de leur poids :

$$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots \leq c(e_m).$$

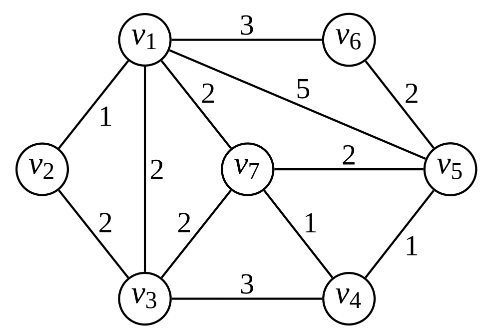
Poser $F := \emptyset$, $k := 0$
Tant que $k < m$ et $|F| < n-1$ faire
  Début
    si e_{k+1} ne forme pas de cycle avec F alors $F := F \cup \{e_{k+1}\}$
    $k := k+1$
  Fin

Exemple



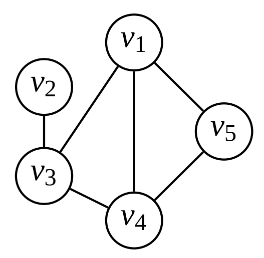
Les arêtes de poids 3 n'ont pas pu être placées, car elles auraient formé un cycle. L'algorithme s'est arrêté dès que cinq arêtes ont été placées. Toute arête supplémentaire aurait créé un cycle.
S'il y a plusieurs arêtes de même poids, il peut y avoir plusieurs arbres couvrants de poids minimum : tout dépend de l'ordre dans lequel ces arêtes ont été triées.

Exercice 40
Trouvez tous les arbres couvrants de poids minimum du graphe ci-après (les chiffres sur les arêtes représentent leur poids).

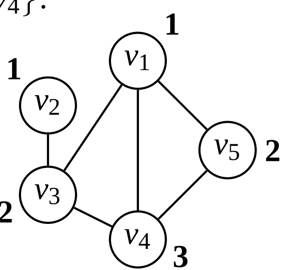


1.12 Coloration

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble S de V est un **stable** s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. Dans le graphe ci-dessous, $\{v_1, v_2\}$ forment un stable ; $\{v_2, v_4\}$ aussi, ainsi que $\{v_2, v_5\}$ et $\{v_3, v_5\}$.
Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G ; on le note $\alpha(G)$. Dans le graphe ci-dessous, on a $\alpha(G)$=2.



La **coloration** des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.
Le **nombre chromatique** du graphe G, noté $\gamma(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de V en k sous-ensembles stables.
Sur le graphe ci-dessous, on a eu besoin de trois couleurs (notées 1, 2 et 3) pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. On a donc trois stables : $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$ et $\{v_4\}$. On ne peut pas utiliser moins de couleurs, à cause des cliques $\{v_1, v_4, v_5\}$ et $\{v_1, v_3, v_4\}$.



Remarquons enfin que le sommet v_2 aurait aussi pu être coloré « 3 ». La coloration minimale n'est donc pas forcément unique.

1.12.1 Encadrement du nombre chromatique

Majoration

- $\gamma(G) \leq r + 1$, où r est le plus grand degré des sommets de G.

  Preuve : Soit un graphe et r le degré maximum de ses sommets. Donnons-nous une palette de $(r + 1)$ couleurs. Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant : ce sommet est adjacent à r sommets au plus, et le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est donc inférieur ou égal à r. Il reste donc au moins une couleur non utilisée dans la palette, avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.

- $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$

  Preuve : Considérons S un stable de V de cardinalité $\alpha(G)$. Une coloration possible des sommets consiste à colorer les sommets de S d'une même couleur et les $n - \alpha(G)$ autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que $\gamma(G) \leq 1 + (n - \alpha(G))$.

Minoration

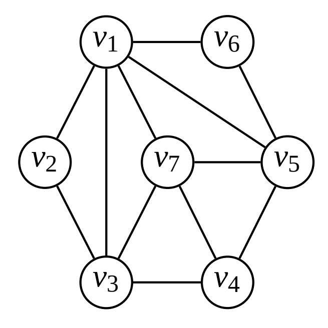
- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

  Preuve : Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

- Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique, que l'on note $\omega(G)$ (prononcer oméga de G). Autrement dit, $\gamma(G) \geq \omega(G)$

  Preuve : Puisque, par définition, dans une clique d'ordre m, tous les sommets sont adjacents entre eux, il faudra m couleurs. Donc, il faudra au moins $\omega(G)$ couleurs pour colorer le graphe G.

Exercice 41
Majorez et minorez le nombre chromatique de ce graphe.



Exercice 42
On donne un graphe de 7 sommets par sa matrice d'adjacences M ci-dessous. Ce graphe représente les 7 bancs d'un parc et les allées permettant de passer de l'un à l'autre.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On veut peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Donnez un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaire, en justifiant. Déterminez ce nombre.
2. Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?
3. Est-il possible de parcourir des allées de ce parc en passant à côté de chaque banc exactement une fois ?

Exercice 43
Sept élèves, désignés par A, B, C, D, E, F et G, se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui a rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

l'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

Exercice 44

Sept agences de voyage proposent des visites de monuments et lieux emblématiques de Saint-Pétersbourg : la cathédrale Saint-Isaac, le Musée de l'Ermitage, le Musée russe et la forteresse Pierre et Paul. Un même lieu ne peut pas être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour.

La première compagnie fait visiter uniquement la cathédrale Saint-Isaac ; la seconde la cathédrale Saint-Isaac et le Musée russe ; la troisième la forteresse Pierre et Paul ; la quatrième le Musée russe et la forteresse Pierre et Paul ; la cinquième la cathédrale Saint-Isaac et le Musée de l'Ermitage ; la sixième le Musée de l'Ermitage et la forteresse Pierre et Paul ; la septième le Musée russe et le Musée de l'Ermitage.

Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ?

Exercice 45

Un lycée doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7.

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Exercice 46

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		✘	✘	✘			✘	✘
B	✘				✘	✘	✘	
C	✘			✘		✘	✘	✘
D	✘		✘		✘			✘
E		✘		✘		✘	✘	
F		✘	✘		✘			
G	✘	✘	✘		✘			
H	✘		✘	✘				

Quel nombre minimum de wagons faut-il ?

Exercice 47

Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut pas être coloré en moins de trois couleurs.

1. Construire un graphe sans K_3 qui nécessite également trois couleurs.
2. Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?
3. Comment construire un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?

Exercice 48
Exprimez la résolution d'un Sudoku classique en termes de coloration de graphe. Décrivez le graphe (nombre de sommets, nombre d'arêtes, etc.). Combien faut-il de couleurs ?

1.12.2 Algorithme de coloration de Welsh et Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

Étape 1
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

Étape 2
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Étape 3
S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, FIN.

Exercice 49
Utilisez l'algorithme de coloration de Welsh et Powell pour colorer les graphes des exercices 41, 44 et 45.

1.12.3 Graphes parfaits

Dans le cadre de la théorie des graphes, Claude Berge a introduit en 1960 la notion de **graphe parfait** comme définissant un graphe pour lequel le nombre chromatique de chaque sous-graphe induit et la taille de la plus grande clique dudit sous-graphe induit sont égaux. Un graphe G est donc parfait si pour tout sous-graphe induit G' de G on a $\gamma(G') = \omega(G')$.

1.12.4 Coloration des sommets d'un graphe planaire

Théorème 1.13 (Théorème des quatre couleurs)
On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Cette conjecture a été formulée pour la première fois par l'Écossais Francis Guthrie en 1852. Il était alors question de coloration de carte de géographie (voir exercice 51). La preuve de ce théorème n'arriva qu'en... 1976, grâce à Kenneth Appel et Wolfgang Haken. La démonstration fit grand bruit car ce fut le premier théorème de l'histoire des mathématiques qui a nécessité l'usage systématique de l'ordinateur.

Exercice 50
Colorez cet oeuf et le billet posé dessus avec le moins de couleurs possibles, en faisant en sorte que deux régions voisines aient des couleurs différentes.

Combien de couleurs donne l'algorithme de Welsh et Powell ?



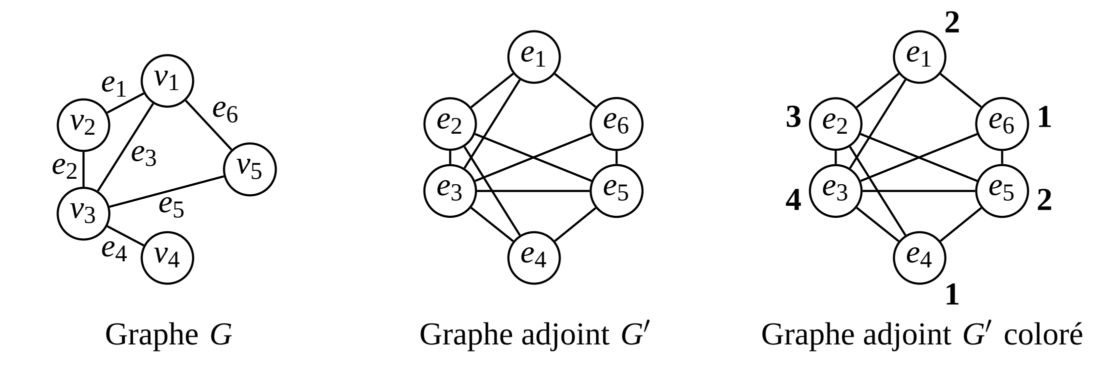
Exercice 51
Colorez la carte des communes d'Ajoie ci-dessous en utilisant le moins de couleurs possibles, de sorte que deux régions voisines aient des couleurs différentes.
Construisez d'abord un graphe associé à cette carte, puis colorez-en les sommets.



1.12.5 Coloration des arêtes d'un graphe

La coloration des arêtes d'un graphe consiste à affecter à toutes les arêtes de ce graphe une couleur de telle sorte que deux arêtes adjacentes ne portent pas la même couleur.
L'**indice chromatique** du graphe G est le plus petit entier k pour lequel il existe une coloration des arêtes ; on le note $\chi(G)$.
Pour colorer les arêtes d'un graphe, on peut se ramener au problème de la coloration des sommets. Il suffit pour cela de travailler non pas sur le graphe lui-même, mais sur le graphe adjoint, noté G', et que l'on définit ainsi :

1. à chaque arête de $G = (V, E)$ correspond un sommet de $G' = (E, F)$
2. deux sommets de G' sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes de G sont adjacentes.



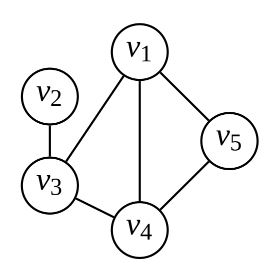
Graphe G Graphe adjoint G' Graphe adjoint G' coloré

On peut ensuite appliquer l'algorithme de Welsh et Powell sur le graphe G' pour colorer ses sommets. Une fois cela fait, on colorera les arêtes de G de la même couleur que les sommets correspondants de G'.

Exercice 52
Dans un tournoi d'échecs, chaque joueur doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Déterminez la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de joueurs est 3, 4, 5 ou 6.

1.13 Graphes triangulés

Un graphe est **triangulé** si tous ses cycles de plus de 3 sommets contiennent au moins une **corde** (arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle).
Un **séparateur** est un sous-ensemble W de sommets dans un graphe connexe $G = (V,E)$ tel que le graphe $G[V-W]$ est non connexe. Dans le graphe ci-dessous, $W = \{v_1, v_4\}$ est un séparateur, $W = \{v_3\}$ est un séparateur minimal.



Un sommet v est dit **simplicial** si son voisinage $N(v)$ est une clique. Dans le graphe ci-dessus, les sommets simpliciaux sont v_2 et v_5.

Théorème 1.14
Un graphe connexe est triangulé si et seulement si tout séparateur minimal est une clique.

Preuve

1. Supposons tout d'abord que tout séparateur est une clique. Soit $C = [x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1]$ $(k \geq 4)$ un cycle dans G et soit W un séparateur minimal de x_1 et x_3. W doit contenir x_2 et au moins un des sommets $x_4, \ldots, x_k$. Comme W est une clique, il existe une corde dans C.

2. Supposons G triangulé et soit W un séparateur minimal. Supposons que W ne soit pas une clique. Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux composantes connexes de $G[V - W]$ et soient x et y deux sommets non adjacents dans W. Comme W est minimal, x et y ont chacun au moins un voisin dans G_1 et dans G_2. Soient a_1 et a_2 les voisins de x dans G_1 et G_2, et soient b_1 et b_2 ceux de y dans G_1 et G_2. Comme G_1 et G_2 sont connexes, il existe une chaîne reliant a_1 à b_1 dans G_1 et une chaîne reliant a_2 à b_2 dans G_2. Il existe donc une chaîne C_1 sans corde reliant x à y dans $G[V_1 \cup W]$ ainsi qu'une chaîne sans corde C_2 reliant x à y dans $G[V_2 \cup W]$. L'union de C_1 et C_2 est un cycle sans corde contenant au moins 4 sommets, contradiction.

$\square$

Théorème 1.15
Tout graphe triangulé autre qu'une clique contient au moins deux sommets simpliciaux non adjacents.

Preuve

Si G ne contient que deux sommets, alors G est constitué de deux sommets isolés qui sont simpliciaux non adjacents. Supposons donc le théorème vrai pour tout graphe ayant moins de n sommets et soit $|V| = n$. Soit W un séparateur minimal et $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux composantes connexes de $G[V - W]$. On a vu que W est une clique.

– Si $G[V_1 \cup W]$ est une clique alors choisissons x dans V_1 : x est simplicial dans $G[V_1 \cup W]$.
– Sinon, par hypothèse d'induction, il existe deux sommets simpliciaux non adjacents dans $G[V_1 \cup W]$, et comme W est une clique, l'un de ces sommets qu'on appellera x est dans V_1.

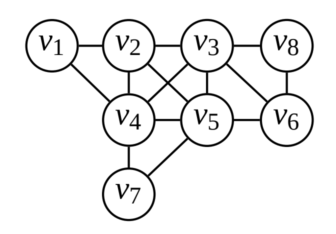
Dans chacun des deux cas on a déterminé un sommet x simplicial dans $G[V_1 \cup W]$. De même, on peut déterminer un sommet y simplicial dans $G[V_2 \cup W]$. Ces deux sommets x et y sont simpliciaux dans G et non-adjacents.

$\square$

Algorithme de reconnaissance (Fulkerson et Gross, 1969)

1. Poser $G' = G$;
2. Si G' est vide alors G est triangulé : STOP
3. Si G' ne contient pas de sommet simplicial alors G n'est pas triangulé.
4. Ôter un sommet simplicial de G' et retourner à 2.

Exercice 53
Appliquez l'algorithme de Fulkerson et Gross pour vérifier que le graphe ci-dessous est triangulé.



Un **schéma d'élimination parfait** est un ordre $v_1 < \ldots < v_n$ des sommets tel que v_i est simplicial dans $G[v_i,\ldots,v_n]$ $(n = |V|)$.

Théorème 1.16
Un graphe est triangulé si et seulement s'il possède un schéma d'élimination parfait.

Preuve

1. Soit $v_1 < \ldots < v_n$ un schéma d'élimination parfait et soit $C = [x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1]$ $(k \geq 4)$ un cycle dans G. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1 = v_i$ apparaît avant $x_2,\ldots,x_k$ dans le schéma d'élimination parfait. Mais alors x_2 est relié à x_k car x_1 est simplicial dans le graphe $G[v_i,\ldots,v_n]$ qui contient $x_2,\ldots,x_k$. Le cycle C a donc une corde.
2. Si G est triangulé on peut déterminer un schéma d'élimination parfait comme suit :
   Poser i :=1 ;
   Tant que $V \neq \varnothing$ faire
      Choisir un sommet simplicial x dans le graphe résiduel. Mettre x en position i
      Ôter x de V et poser $i := i+1$

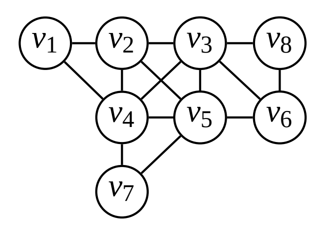
□

Exercice 54
Montrez que les arbres, les graphes complets et les graphes d'intervalles sont des graphes triangulés.

Algorithme de coloration d'un graphe triangulé *G* = *(V,E)*

Déterminer un schéma d'élimination parfait $v_1 < \ldots < v_n$
Colorer G séquentiellement selon l'ordre inverse $v_n < \ldots < v_1$, en utilisant pour chaque sommet le plus petit numéro de couleur possible.

Exercice 55
Donnez un schéma d'élimination parfait du graphe ci-dessous et colorez ce graphe.



2 Graphes orientés

2.1 Graphes orientés

En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un **digraphe** (ou **graphe orienté**). Le mot « digraphe » est la contraction de l'expression anglaise « directed graph ».
Un digraphe fini $G = (V,E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arcs**.
Un arc e de l'ensemble E est défini par une paire ordonnée de sommets. Lorsque $e = (u,v)$, on dit que l'arc e va de u à v. On dit aussi que u est l'extrémité initiale et v l'extrémité finale de e.

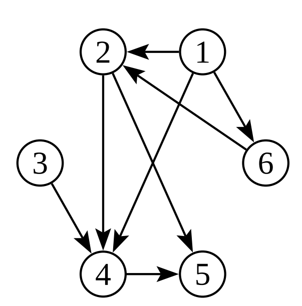
Exercice 56
Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de ».

2.2 Degré d'un sommet d'un digraphe

Soit v un sommet d'un graphe orienté.
On note $d^+(v)$ le degré **extérieur** du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité initiale.
On note $d^-(v)$ le degré **intérieur** du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité finale.
On définit le degré :

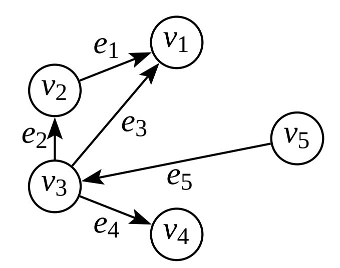
$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

Exercice 57
Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets du graphe ci-dessous :



2.3 Chemins et circuits

Un **chemin** conduisant du sommet a au sommet b est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arcs, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arc est encadré à gauche par son sommet origine et à droite par son sommet destination. On ne peut donc pas prendre les arc à rebours. Sur le digraphe ci-après, on peut voir par exemple le chemin $(v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$. Par convention, tout chemin comporte au moins un arc.
On appelle **distance** entre deux sommets d'un digraphe la longueur du plus petit chemin les reliant. S'il n'existe pas de chemin entre les sommets x et y, on pose $d(x,y) = \infty$. Par exemple, sur le digraphe ci-dessous, $d(v_5, v_4) = 2$, $d(v_4, v_5) = \infty$, $d(v_3, v_1) = 1$,



Un **circuit** est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes. Le digraphe ci-dessus ne contient pas de circuit.
Les notions de chemins et de circuits sont analogues à celles des chaînes et des cycles pour les graphes non orientés.

Exercice 58
Soit X un ensemble de lapins, et G un graphe orienté ayant X pour ensemble de sommets. On dit que G est un « graphe de parenté » si les arcs de G codent la relation « être le parent de... ». Quelles conditions doit nécessairement vérifier G pour pouvoir être un graphe de parenté ?

Exercice 59
On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres.
Comment doit-on procéder ?

Exercice 60 (Jeu de Fan Tan)
Deux joueurs disposent de plusieurs tas d'allumettes. À tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.
Modélisez ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois. Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?

Exercice 61
On appelle **tournoi** un digraphe complet.

1. Montrez que tout tournoi ayant 3 sommets admet un chemin hamiltonien.
2. Soit T un tournoi ayant $n-1$ sommets et un chemin hamiltonien $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$. On suppose que l'on ajoute un sommet x_n à ce graphe et que, pour chaque sommet $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$, on ajoute soit un arc (x_n, x_j), soit un arc (x_j, x_n), $1 \leq j < n$, de façon à former un tournoi T' sans chemin hamiltonien. Dans quels sens sont alors orientés les arcs entre x_1 et x_n et entre x_{n-1} et x_n ? Est-il possible d'avoir un arc orienté de x_j vers x_n et un autre de x_n vers x_{j+1} pour $1 \leq j < n-1$? En déduire que T' a nécessairement un chemin hamiltonien.
3. Déduisez des questions 1 et 2 que tout tournoi admet un chemin hamiltonien.

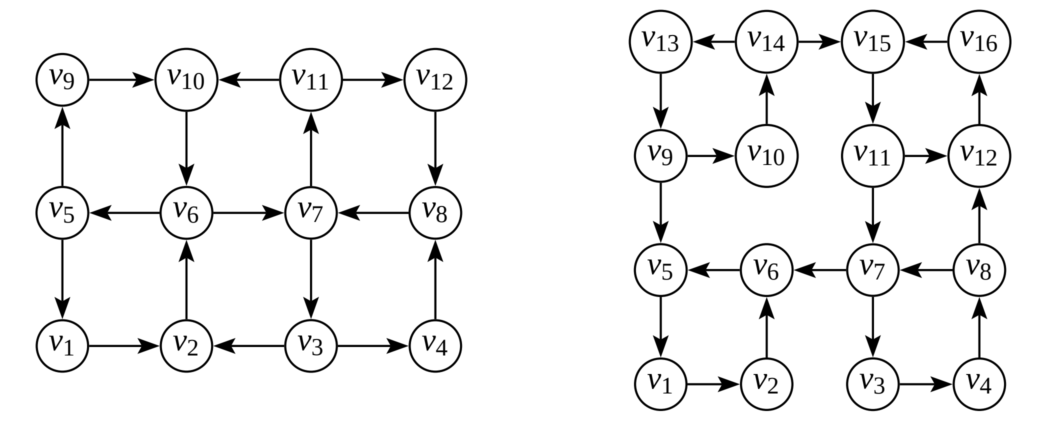
Exercice 62
Dans un digraphe, un **roi** est un sommet duquel tous les autres sommets sont à une distance d'au plus 2.
Démontrez qu'un tournoi a toujours un roi (Landau, 1953).

2.3.1 Digraphe fortement connexe

Un digraphe est **fortement connexe**, si toute paire ordonnée (a, b) de sommets distincts du graphe est reliée par au moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin.
On appelle **composante fortement connexe** tout sous-graphe induit maximal fortement connexe (maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenant les sommets de la composante).

Exercice 63
Donnez un algorithme permettant de calculer la distance entre deux sommets x et y d'un digraphe connexe.

Exercice 64
Proposez un algorithme qui détermine si un graphe est fortement connexe ou non.
Indication : utilisez un système de marquage des sommets.
Les graphes ci-dessous sont-il fortement connexes ? Si non, donnez leurs composantes fortement connexes.



2.4 Représentations non graphiques des digraphes

2.4.1 Matrice d'adjacences

On peut représenter un digraphe par une matrice d'adjacences. Une matrice $(n \times m)$ est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie qu'un arc part de i pour rejoindre j.

Exemple

Voici la matrice d'adjacences du digraphe G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.
3. Contrairement à celle d'un graphe non orienté, elle n'est pas symétrique.
4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque digraphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre digraphe.

Exercice 65
On a calculé ci-dessous les matrices M^2 et M^3. M est la matrice d'adjacences du graphe de l'exemple.
Pour chacune de ces matrices, à quoi correspondent les nombres obtenus ?

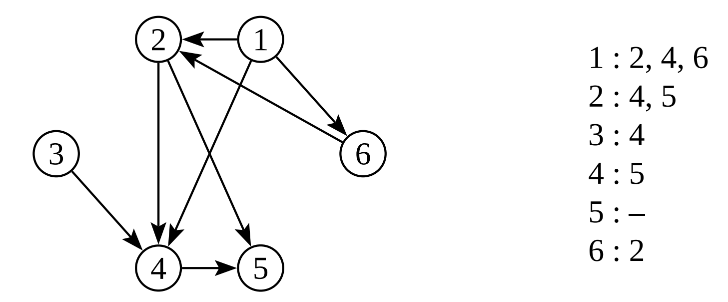
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Listes d'adjacences

On peut aussi représenter un digraphe en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets qu'on peut atteindre directement en suivant un arc (dans le sens de la flèche).

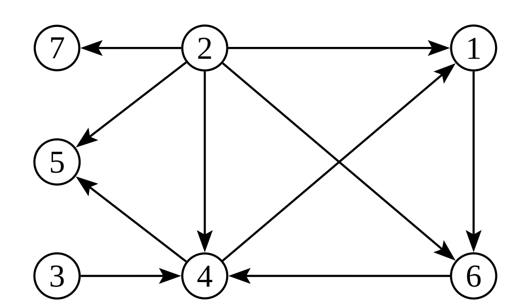
Exemple

Voici les listes d'adjacences du digraphe G :



1 : 2, 4, 6
2 : 4, 5
3 : 4
4 : 5
5 : –
6 : 2

Exercice 66
Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences et des listes d'adjacences.



2.5 Digraphes sans circuit

Théorème 2.1
Le digraphe G est sans circuit si et seulement si on peut attribuer un nombre $r(v)$, appelé le **rang** de v, à chaque sommet v de manière que pour tout arc (u,v) de G on ait $r(u) < r(v)$.

Preuve

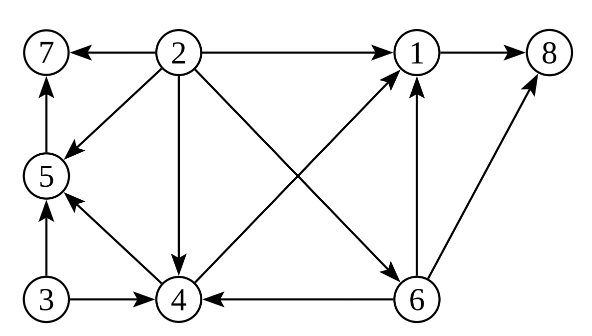
Si G comporte un circuit C, il n'est pas possible de trouver de tels nombres $r(i)$ car, autrement, considérant $r(j) = \max\{r(i) \mid i \in C\}$ et l'arc $(j,k) \in C$, on aurait $r(j) \leq r(k)$ en contradiction avec la définition du rang.
Réciproquement, si G n'a pas de circuit, il existe au moins un sommet sans prédécesseur dans G (sans cela, en remontant successivement d'un sommet à un prédécesseur, on finirait par fermer un circuit). Ainsi, on peut attribuer séquentiellement des valeurs aux sommets du graphe à l'aide de l'algorithme qui suit, ce qui conclura la démonstration.

□

Algorithme de calcul du rang

Donnée : digraphe $G = (V,E)$ sans circuit.
Résultat : rang $r(v)$ de chaque sommet $v \in V$ du digraphe G.
Début
  $r := 0$
  $X := V$
  R : l'ensemble des sommets de X sans prédécesseur dans X
  Tant que X n'est pas vide **faire**
    $r(v) := r$ pour tout sommet $v \in R$
    $X := X - R$
    R : l'ensemble des sommets de X sans prédécesseur dans X
    $r := r + 1$
  Fin tant que
Fin

Exercice 67
Attribuez un rang aux sommets du digraphe ci-dessous en utilisant l'algorithme de calcul du rang.



2.6 Graphes de comparabilité

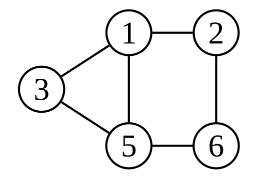
Un graphe est de **comparabilité** si on peut orienter ses arêtes de façon transitive, c'est-à-dire de telle sorte que s'il existe un arc de i vers j et un arc de j vers k, alors il existe également un arc de i vers k.

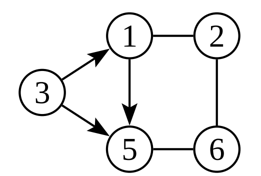
Algorithme permettant de déterminer si *G* = *(V,E)* est un graphe de comparabilité

1. $F := \varnothing$
2. Tant que $F \neq E$ faire

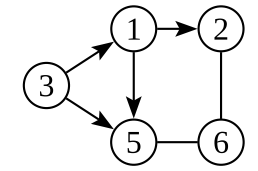
   Choisir une arête e dans $E - F$, donner une orientation à e et compléter cette orientation pour assurer une orientation transitive de G.
   Si une arête doit être orientée dans les deux sens, STOP :
   G n'est pas de comparabilité.
   Sinon, rajouter à F toutes les arêtes nouvellement orientées. Si $F = E$ alors STOP :
   G est de comparabilité.

Exemple



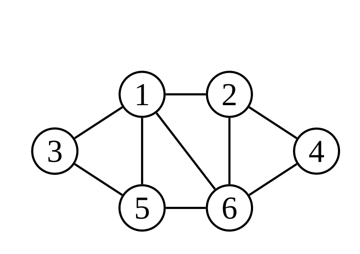


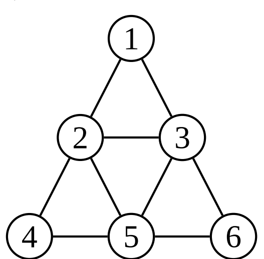
Jusque là, tout va bien…



Aïe. Il manque une arête entre les sommets 3 et 2.

Exercice 68
Les graphes ci-dessous admettent-ils une orientation transitive ?





Etant donné qu'une orientation transitive d'un graphe de comparabilité induit un ordre parfait, on en déduit l'algorithme suivant de coloration minimale des sommets.

Algorithme de coloration minimale des sommets d'un graphe de comparabilité

1. Déterminer une orientation transitive de G (par exemple à l'aide de l'algorithme ci-dessus), et poser $i := 1$.
2. Tant qu'il existe encore des sommets à colorer faire

   donner la couleur i à tous les sommets sans prédécesseur,
   ôter ces sommets du graphe,
   poser $i := i + 1$

Exercice 69
Une compagnie de transport a un ensemble de trajets à effectuer. On décide de représenter ceci par un graphe : un arc de T_i à T_j indique que le trajet T_j peut être effectué par le même véhicule que celui qui a effectué le trajet T_i.

1. De quel type est le graphe obtenu ?
2. Interprétez (dans le graphe non orienté) le problème de la recherche d'un nombre minimum de véhicules.

Exemple

Trajet	T_1	T_2	T_3	T_4
de	A	B	C	B
à	B	C	A	A
départ à	6h	10h	8h	12h

Durée du trajet $\nearrow$	A	B	C
A		1h	3h
B	2h		1h
C	2h	4h	

Exercice 70
On a demandé à un consommateur de comparer n marques de rasoir deux à deux, en indiquant pour chaque paire une préférence stricte.

1. Est-il vrai que l'on peut toujours classer les marques $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de manière que l'on ait $M_1 > M_2 > \ldots > M_n$ (où $M_i > M_j$ indique que M_i est préférée à M_j) ?
2. On constate que le graphe associé à ces préférences ($M_i > M_j$ donne un arc (M_i, M_j)) est sans circuit. Que peut-on dire de la marque M_1 (telle que $M_1 > \ldots > M_n$) ? Est-il possible d'avoir deux marques qui ont été préférées au même nombre d'autres marques ?
3. Existe-t-il toujours une marque M_1 telle que $M_1 > M_j$, $\forall j \neq 1$? Existe-t-il toujours une marque M_1 telle que pour $j \neq 1$:
   – soit $M_1 > M_j$
   – soit $\exists M_k$ telle que $M_1 > M_k > M_j$?

2.7 Algorithme de Dijkstra

Edgser Wybe Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres. Le résultat est une **arborescence**, c'est-à-dire un arbre avec un sommet particulier appelé **racine**.
Numérotons les sommets du graphe $G = (V, E)$ de 1 à n. Supposons que l'on s'intéresse aux chemins partant du sommet 1. On construit un vecteur $\lambda = \big(\lambda(1); \lambda(2); \ldots; \lambda(n)\big)$ ayant n composantes tel que $\lambda(j)$ soit égal à la longueur du plus court chemin allant de 1 au sommet j. On initialise ce vecteur à c_{1j}, c'est-à-dire à la première ligne de la matrice des coûts du graphe, définie comme indiqué ci-dessous :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ et } (i,j) \notin E \\ \delta(i,j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (i,j) \in E \end{cases}$$

où $\delta(i,j) > 0$ est le poids de l'arc (i,j).
On construit un autre vecteur p pour mémoriser le chemin pour aller du sommet 1 au sommet voulu. La valeur $p(i)$ donne le sommet qui précède i dans le chemin.

On considère ensuite deux ensembles de sommets, S initialisé à $\{1\}$ et T initialisé à $\{2,3,\ldots,n\}$. À chaque pas de l'algorithme, on ajoute à S un sommet jusqu'à ce que $S=V$ de telle sorte que le vecteur λ donne à chaque étape la longueur minimale des chemins de 1 aux sommets de S.

Algorithme de Dijkstra

On suppose que le sommet de départ (qui sera la racine de l'arborescence) est le sommet numéroté 1. Notons qu'on peut toujours renuméroter les sommets pour que ce soit le cas.

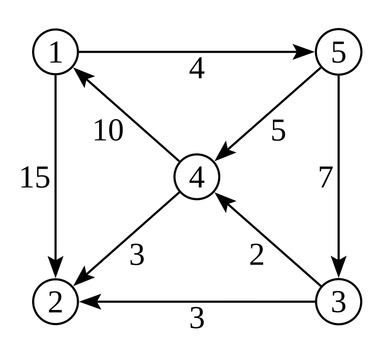
Initialisations

$\lambda(j)=c_{1j}$ et $p(j)=\text{NIL}$, pour $1\leq j\leq n$
Pour $2\leq j\leq n$ **faire**
  Si $c_{1j}<\infty$ **alors** $p(j)=1$.
$S=1$; $T=\{2,3,\ldots,n\}$.

Itérations

Tant que T n'est pas vide **faire**
  Choisir i dans T tel que $\lambda(i)$ est minimum
  Retirer i de T et l'ajouter à S
  Pour chaque successeur j de i, avec j dans T, **faire**
    Si $\lambda(j)>\lambda(i)+\delta(i,j)$ **alors**
      $\lambda(j)=\lambda(i)+\delta(i,j)$
      $p(j)=i$

Exemple



Initialisations
$S=\{1\}$; $T=\{2,3,4,5\}$; $\lambda=(0,15,\infty,\infty,4)$; $p=(\text{NIL},1,\text{NIL},\text{NIL},1)$

1ère itération
$i=5$ car $\lambda(5)=\min(15,\infty,\infty,4)=4$
$S=\{1,5\}$; $T=\{2,3,4\}$
les successeurs de 5 dans T sont 3 et 4
$\lambda(3)$ prend la nouvelle valeur $\min(\infty;\lambda(5)+\delta(5;3))=\min(\lambda;4+7)=11$; $p(3)=5$
$\lambda(4)$ prend la nouvelle valeur $\min(\infty;\lambda(5)+\delta(5;4))=9$; $p(4)=5$
d'où les nouveaux vecteurs $\lambda=(0,15,11,9,4)$ et $p=(\text{NIL},1,5,5,1)$

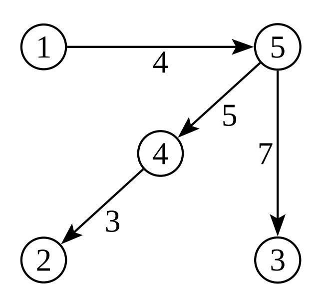
2ème itération
$i = 4$; $\lambda(4) = 9$
$S = \{1,5,4\}$; $T = \{2,3\}$
le seul successeur de 4 dans T est 2
$\lambda(2)$ prend la nouvelle valeur $\min(15; \lambda(4) + \delta(4;2)) = \min(15; 9+3) = 12$; $p(2) = 4$
d'où les nouveaux vecteurs $\lambda = (0,12,11,9,4)$ et $p = (\text{NIL},4,5,5,1)$

3ème itération
$i = 3$; $\lambda(3) = 11$
$S = \{1,5,4,3\}$; $T = \{2\}$
le seul successeur de 3 dans T est 2
$\lambda(2)$ garde sa valeur car $\min(12; \lambda(3) + \delta(3;2)) = \min(12; 11+3) = 12$
d'où les vecteurs inchangés $\lambda = (0,12,11,9,4)$ et $p = (\text{NIL},4,5,5,1)$

4ème itération
$i = 2$; $\lambda(2) = 12$
$S = \{1,5,4,3,2\}$; $T = \{\}$
$\lambda = (0,12,11,9,4)$
$p = (\text{NIL},4,5,5,1)$

L'algorithme se termine, car $T = \{\}$.

On peut lire les coûts des chemins les plus courts dans λ et les chemins eux-mêmes grâce au vecteur p. Par exemple, le chemin minimal de 1 à 4 est de coût 9, car $\lambda(4) = 9$. C'est le chemin 1–5–4, car $p(4) = 5$ et $p(5) = 1$.
Voici la réponse sous forme d'arborescence :



Exercice 71
Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe de l'exemple ci-dessus pour trouver tous les plus courts chemins en partant des sommets 2, 3, 4 et 5.

Exercice 72
Expliquez pourquoi des arcs avec des poids négatifs pourraient poser problème dans la recherche d'un plus court chemin dans un graphe.

2.8 Réseau PERT (Project Evaluation and Review Technique)

Le problème du **plus long chemin** dans les digraphes sans circuit trouve une application dans l'ordonnancement et la planification des tâches composant un projet complexe, par exemple la construction d'une maison.
On fait correspondre à chaque tâche un arc d'un digraphe, sa durée d'exécution étant égale au poids de cet arc. Le digraphe reflète les précédences requises dans l'exécution du projet.

Ainsi, la tâche correspondant à l'arc (i,j) ne peut commencer que si toutes les tâches correspondant à des arcs (k,i) ont été complétées. Le digraphe peut contenir des tâches fictives de durée nulle afin de forcer certaines précédences.

Les sommets du digraphe représentent des événements, début (fin) des activités correspondant aux arcs dont ils sont l'extrémité initiale (finale). Le fait que le digraphe est sans circuit est garant de la faisabilité du projet. En effet, l'existence d'un circuit impliquerait une contradiction dans les précédences : une tâche devant en même temps précéder et suivre une autre !

On supposera dorénavant que les sommets ont déjà été numérotés de 1 à n de manière compatible avec leurs rangs, c'est-à-dire que $r(j) > r(i)$ implique $j > i$ (voir l'algorithme de calcul du rang). En plus, si le digraphe possède plusieurs sommets sans prédécesseur, on supposera avoir introduit un sommet 1 relié par un arc de durée nulle à chacun de ces sommets. Ce sommet indique le début du projet. De même, si le digraphe possède plusieurs sommets sans successeur, ceux-ci seront reliés par un arc de durée nulle à un dernier sommet n (fin du projet). Enfin, on supposera éliminés les arcs parallèles par l'introduction de tâches fictives.

Algorithme du chemin critique

Données : Digraphe $G = (V,E)$, sans circuit, des activités avec leur durée d_{ik}.
Notations :
$P(i) = \{k \in V \mid (k,i) \in E\}$: c'est l'ensemble des sommets prédécesseurs de i.
$S(i) = \{k \in V \mid (i,k) \in E\}$: c'est l'ensemble des sommets successeurs de i.
Résultat :
- δ_i : début au plus tôt des activités correspondant aux arcs (i,k) partant de i,
- ϕ_i : fin au plus tard des activités correspondant aux arcs (k,i) arrivant à i,
- durée du chemin critique.

Début
- Calcul des dates de début au plus tôt (récurrence en avançant dans le projet)
  $\delta_1 := 0$
  Pour $k := 2$ à n faire $\delta_k := \max\{\delta_j + d_{jk} \mid j \in P(k)\}$
- Calcul des dates de fin au plus tard (récurrence en reculant dans le projet)
  $\phi_n := \delta_n$
  Pour $k := n-1$ à 1 faire $\phi_k := \min\{\phi_j - d_{kj} \mid j \in S(k)\}$

Fin.

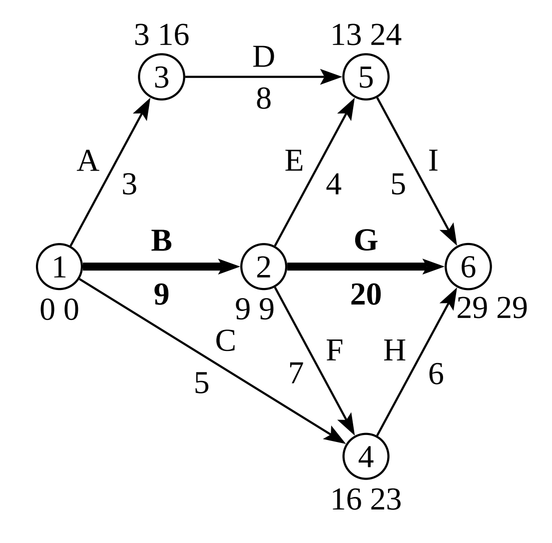
Définitions

- Un **sommet** i est **critique** si $\delta_i = \phi_i$.
- Un **arc** (i,j) est **critique** si ses extrémités sont des sommets critiques et $d_{ij} = \delta_j - \delta_i$.
- Un **chemin critique** est un chemin de 1 à n n'utilisant que des arcs critiques, c'est-à-dire des activités telles que tout retard dans leur exécution provoquerait un retard de la fin du projet.
- La **durée du chemin critique** est donnée par δ_n (ou par ϕ_n, les deux valeurs étant toujours égales). Elle correspond à la durée minimale du projet étant données les durées des tâches le composant et les précédences respectives.

Exemple

Ci-dessous le graphe des précédences obtenu avec l'algorithme du chemin critique. Le chemin critique est en gras.

Tâches	Précédences	Durée (jours)
A	–	3
B	–	9
C	–	5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C, F	6
I	D, E	5



Conventions d'écriture :

j —— Nom de la tâche / Durée de la tâche ——> k

$\delta_j \ \phi_j$ $\qquad$ $\delta_k \ \phi_k$

Exercice 73
Refaites le graphe des précédences de l'exemple en utilisant l'algorithme du chemin critique.

Exercice 74
La construction d'un entrepôt est divisée en dix tâches dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous. Trouvez le chemin critique.

Tâches	Nature	Précédences	Durée (jours)
A	Acceptation des plans par le propriétaire	–	4
B	Préparation du terrain	–	2
C	Commande des matériaux	A	1
D	Creusage des fondations	A, B	1
E	Commande des portes et fenêtres	A	2
F	Livraison des matériaux	C	2
G	Coulage des fondations	D, F	2
H	Livraison des portes et fenêtres	E	10
I	Pose des murs, de la charpente et du toit	G	4
J	Mise en place des portes et fenêtres	H, I	1

Exercice 75
La rénovation du séjour d'un appartement se décompose en plusieurs tâches décrites dans le tableau ci-dessous. Ce dernier donne également les précédences à respecter lors de la planification des travaux ainsi qu'une estimation de la durée de chacune des tâches.

	Tâches	Précédences	Durée (jours)
A	Enlèvement des portes	–	1/2
B	Ponçage et peinture des portes	A	3
C	Pose des portes	B, J	1/2
D	Arrachage des papiers peints	–	1
E	Tirage des fils électriques	D	1
F	Pose des prises	E, H, I	1/2
G	Ragréage des murs	E, A	2
H	Peinture du plafond	G	2
I	Pose des papiers peints	G	3
J	Peinture des cadres	H, I	1
K	Arrachage de la moquette	H, I, J	1/2
L	Ponçage du parquet	K	1
M	Imprégnation et séchage du parquet	L, F	4
N	Peinture du balcon	–	2
O	Changement des protections solaires	N	1

1. Représentez le graphe des précédences de ces travaux de rénovation.
2. Déterminez une durée totale minimale de rénovation en exhibant un chemin critique dans ce graphe.

Bibliographie

[1] COGIS O., ROBERT C., *Théorie des graphes*, Vuibert, 2003

[2] DROESBEKE F., HALLIN M., LEFEVRE C., *Les graphes par l'exemple*, Ellipse, 1987

[3] HERTZ A., *L'agrapheur - Intrigues policières à saveur mathématique*, Presses internationales Polytechnique, 2010

[4] GONDRAN M., MINOUX M., *Graphes et algorithmes*, 4e édition, Lavoisier, 2009

[5] SKIENA S., *Implementing Discrete Mathematics : Combinatorics and Graph Theory With Mathematica*, Addison-Wesley, 1990

[6] WEST D., *Introduction to Graph Theory*, 2nd edition, Prentice Hall, 2001

Lexique

Acyclique (*Acyclic*)
Un graphe est acyclique s'il ne contient aucun cycle.

Adjacent (*Adjacent*)
Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête. On qualifie souvent de *voisins* deux sommets adjacents.

Arborescence (*Rooted tree*)
Arbre avec un sommet distingué r (la racine).

Arbre (*Tree*)
Graphe connexe ne contenant aucun cycle.

Arbre couvrant (*Spanning tree*)
Un sous-graphe maximum d'un graphe qui est aussi un arbre. On parle aussi d'arbre de recouvrement.

Arc (*Arc*)
Une arête orientée d'un digraphe.

Arête (*Edge*)
Une arête relie deux sommets dans un graphe. Nous appelons ces deux sommets les extrémités de l'arête.

Biparti (*Bipartite*)
Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y. Les arbres sont des exemples des graphes bipartis. Si G est biparti, il est habituellement noté par $G = (X, Y, E)$, où E est l'ensemble des arêtes.

Boucle (*Loop*)
Arête ou arc partant d'un sommet et allant vers lui-même. Les boucles ne sont pas autorisées dans les graphes et digraphes simples.

Chaîne (*Chain*)
Une chaîne dans un graphe est une suite de sommets reliés par des arêtes. La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes utilisées, ou, ce qui revient au même, le nombre de sommets utilisés moins un. Une chaîne **élémentaire** ne peut pas visiter le même sommet deux fois. Une chaîne **simple** ne peut pas visiter la même arête deux fois.

Chemin (*Path*)
Un chemin dans un digraphe est une suite de sommets reliés les uns aux autres par des arcs. La longueur du chemin est le nombre d'arcs utilisés, ou le nombre de sommets moins un. Un chemin **simple** ne peut pas visiter le même arc plus d'une fois. Un chemin **fermé** a pour dernier sommet le premier.

Circuit (*Circuit*)
Dans un digraphe, un circuit est un chemin fermé simple.

Clique (*Clique*)
Sous-graphe complet d'un graphe G. L'ordre de la plus grande clique de G est noté $\omega(G)$. Prononcer « oméga de G ».

Complet (*Complete*)
Dans un graphe complet, toutes les paires de sommets sont adjacentes. Un graphe complet à n sommets est noté K_n (le K est en l'honneur de Kuratowski, un pionnier de la théorie des graphes).

Composante connexe (*Connected component*)
Dans un graphe, une composante connexe est un sous-graphe induit maximal connexe. Maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe induit connexe plus grand contenant les sommets de la composante.

Connexe (*Connected*)
Un graphe connexe est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une chaîne. Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe, et se décompose en composantes connexes.

Couplage ou appariement (*Matching*)
Un couplage est un ensemble d'arêtes tel que chaque sommet du graphe appartient à au plus une arête de cet ensemble.

Couplage parfait (*Perfect matching*)
Dans un graphe à $2n$ sommets, un couplage avec n arêtes est dit parfait. Chaque sommet du graphe est saturé par un couplage parfait.

Corde (*Chord*)
Arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle.

Cycle (*Cycle*)
Dans un graphe, un cycle est une chaîne simple dont les extrémités coïncident. On ne rencontre pas deux fois le même sommet, sauf celui choisi comme sommet de départ et d'arrivée.

Degré (*Degree*)
Le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Diamètre (*Diameter*)
Le diamètre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets de ce graphe.

Digraphe (*Digraph*)
Un digraphe est un graphe dans lequel les arêtes sont orientées et appelées arcs. Plus formellement, un digraphe est un ensemble de sommets ainsi qu'un ensemble de paires ordonnées des sommets, appelées les arcs.

Distance (*Distance*)
La distance entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne entre eux.

Eulérien (*Eulerian*)
Une chaîne ou un cycle est dit eulérien si chaque arête du graphe y apparaît exactement une fois. Les chemins et les circuits des digraphes sont dits eulériens sous les mêmes conditions.

Feuille (*Leaf*)
Sommet de degré 1. Aussi appelé *sommet pendant*.

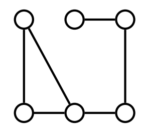
Forêt (*Forest*)
Graphe qui ne contient aucun cycle. Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

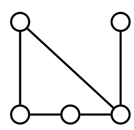
Fortement connexe (*Strongly Connected*)
Dans un digraphe fortement connexe, chaque sommet peut être atteint depuis n'importe quel autre par un chemin.

Graphe (*Graph*)
Un graphe est un ensemble de points, dont certaines paires sont reliées par des lignes. Les points sont appelés sommets et les lignes sont nommées arêtes.
Plus formellement, un graphe est composé de deux ensembles, l'ensemble des arêtes (E) et l'ensemble des sommets (V). L'ensemble des sommets est simplement une collection d'étiquettes qui permettent de distinguer un sommet d'un autre. L'ensemble des arêtes est constitué de paires non ordonnées d'étiquettes de sommets.

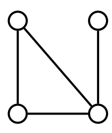
Hamiltonien (*Hamiltonian*)
Une chaîne ou un cycle est dit hamiltonien si chaque sommet du graphe y apparaît exactement une fois. Les chemins et les circuits des digraphes sont dits hamiltoniens sous les mêmes conditions.

Homéomorphe (*Homeomorphic*)
Deux graphes sont homéomorphes s'ils peuvent tous les deux être obtenus à partir d'un graphe commun en remplaçant les arêtes par des chaînes simples.
Les deux graphes ci-dessous sont homéomorphes.





Ils ont tous les deux été obtenus à partir du graphe ci-dessous :



Incident (*Incident*)
Un sommet est incident à une arête s'il est situé à une des deux extrémités de cette arête. Inversement, une arête est incidente à un sommet si elle « touche » ce sommet.

Indice chromatique (*Chromatic index*)
L'indice chromatique d'un graphe est le plus petit nombre k pour lequel il existe une k-coloration des arêtes. L'indice chromatique du graphe G est noté par $\chi(G)$. Prononcer « khi de G ».

***k*-colorable (*k-colorable*)**
Un graphe est dit k-colorable si à chacun de ses sommets peut être assignée une parmi k couleurs de sorte qu'à deux sommets adjacents soit assignée une couleur différente. Cette assignation est appelée coloration.

Liste d'adjacences (*Adjacency Structure*)
Une représentation d'un graphe ou d'un digraphe qui énumère, pour chaque sommet, tous les sommets qui sont adjacents au sommet donné.

Liste d'arcs (*Arc List*)
Une représentation d'un digraphe utilisant les arcs du digraphe. Ce peut être une liste de paires ordonnées de sommets, ou deux listes triées avec le sommet de départ dans une liste et le sommet de fin à la position correspondante de la deuxième liste.

Matrice d'adjacences (*Adjacency Matrix*)
Une matrice carrée contenant des 0 et des 1, dont les lignes et les colonnes sont classées par sommets. Un 1 en position (i, j) signifie qu'il y a une arête (ou arc) du sommet i au sommet j. Un 0 indique qu'il n'y a aucune arête ou arc. Une matrice d'adjacences peut être utilisée pour des graphes et des digraphes.

Multigraphe (*Multigraph*)
Un multigraphe est un graphe contenant des boucles et/ou plusieurs arêtes reliant les mêmes sommets.

Nombre chromatique (*Chromatic number*)
Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre k pour lequel il existe une k-coloration des sommets. Le nombre chromatique du graphe G est noté par $\gamma(G)$. Prononcer « gamma de G ».

Nombre cyclomatique (*Cyclomatic number*)
$\nu(G) = m - n + p$, avec :
n : nombre de sommets
m : nombre d'arcs
p : nombre de composantes connexes

Ordre (*Order*)
L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Orientation (*Orientation*)
Une assignation de direction aux arêtes d'un graphe. Une arête orientée est un arc. Le graphe auquel on a donné une orientation est dit graphe orienté ou digraphe.

Partiel (*Spanning Subgraph*)
Le graphe obtenu en enlevant des arêtes d'un graphe G est appelé graphe partiel.

Pendant (*Pendant*)
Un sommet est pendant s'il est de degré 1. Aussi appelé feuille si le graphe est un arbre.

Planaire (*Planar*)
Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner sur une surface plate sans que ses arêtes se croisent. Les graphes que l'on ne peut pas dessiner sans croisement sont dits non planaires.

Racine (*Root*)
Sommet distingué d'un arbre. En distinguant un sommet d'un arbre, on obtient une arborescence.

Rang (*Level*)
Dans une arborescence, les sommets à la même distance de la racine sont dits être au même rang. La racine est par convention au rang 0 et la hauteur de l'arbre est le rang maximum.

Régulier (*Regular*)
Dans un graphe régulier, tous les sommets ont le même degré. Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Semi-eulérien (*semi-eulerian*)
Un graphe est semi-eulérien s'il est possible de trouver une chaîne passant une et une seule fois par toutes les arêtes, et s'il n'est pas eulérien.

Semi-hamiltonien (*semi-hamiltonian*)
Un graphe est semi-hamiltonien s'il est possible de trouver une chaîne passant une et une seule fois par tous les sommets, et s'il n'est pas hamiltonien.

Simple (*simple*)
Un graphe est dit simple, s'il ne contient pas de boucle et s'il n'y a pas plus d'une arête reliant deux mêmes sommets.

Simplicial (*simplicial*)
Un sommet v est dit simplicial si son voisinage $N(v)$ est une clique.

Sommet (*Vertex*, pluriel *Vertices*)
Extrémité d'une arête ou d'un arc.

Sous-graphe (*Induced Subgraph*)
Un sous-graphe est obtenu en enlevant à un graphe des sommets et toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

Stable (*Stable*)
Un stable d'un graphe G est un sous-graphe de G sans arête. L'ordre du plus grand stable de G est noté $\alpha(G)$ et s'appelle nombre de stabilité. Prononcer « alpha de G ».

Taille (*Size*)
La taille d'un graphe est le nombre de ses arêtes.

Tournoi (*Tournament*)
Digraphe complet.

Triangulé (*Chordal*)
Un graphe est triangulé si tous ses cycles de longueur supérieur à 3 contiennent au moins une corde.

Voisinage (*Neighborhood*)
Le voisinage d'un sommet est l'ensemble de tous ses sommets adjacents.

Index

Ouvrages publiés par la Commission Romande de Mathématique

OUVRAGES COLLECTIFS DE LA CRM

N° 18 Géométrie 2
N° 21 Méthodes numériques (M.-Y. BACHMANN, H. CATTIN, P. ÉPINEY, F. HAEBERLI et G. JENNY)
N° 23 Géométrie vectorielle et analytique plane
N° 24 Géométrie vectorielle et analytique de l'espace
N° 25 Analyse
N° 26 Probabilités
N° 27 Notions élémentaires
N° 28 Algèbre linéaire

CAHIERS DE LA CRM

N° 1 Suites de nombres réels	Alex WILLA
N° 2 Cryptologie	Nicolas MARTIGNONI
N° 3 Équations algébriques et nombres complexes	Martin CUÉNOD
N° 4 Séries numériques et séries de Taylor	Alex WILLA
N° 5 Arrêt sur image	Daniel PONCET-MONTANGE
N° 6 Introduction à la théorie des graphes	Didier MÜLLER

CRM, CRP ET CRC

Formulaires et Tables (Mathématique, Physique, Chimie)

S. PAHUD

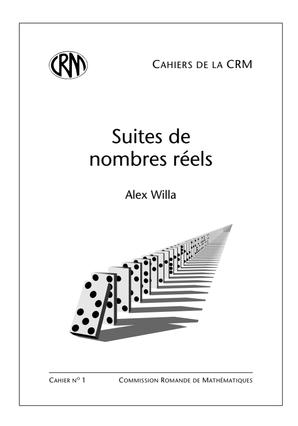
Géométrie expérimentale I, II et III (Livre de l'élève)
Géométrie expérimentale I, II et III (Notes méthodologiques à insérer)

Site web de la CRM

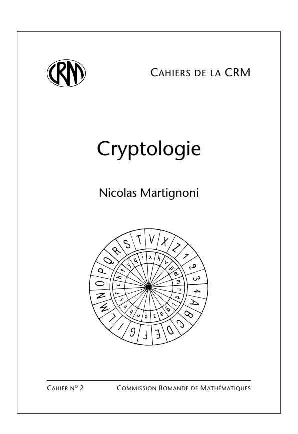
http://www.sspmp.ch/crm/

Diffusion : Pahud & Cie
http://www.diffusionpahud.ch/

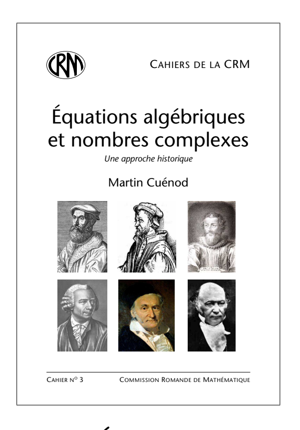
Cahiers de la CRM déjà parus



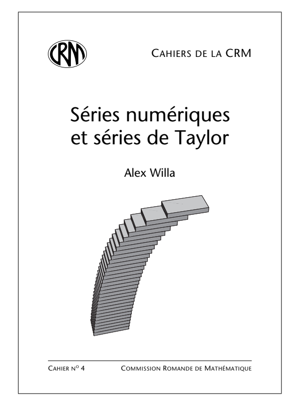
No 1 : Suites de nombres réels



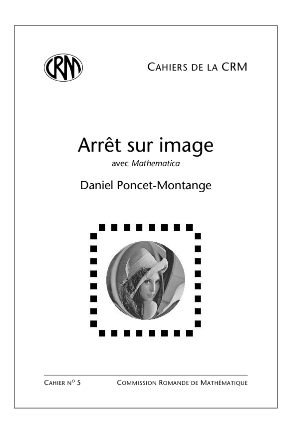
No 2 : Cryptologie



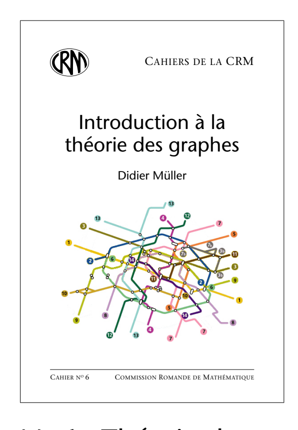
No 3 : Équations & nombres complexes



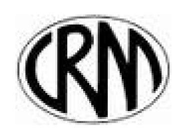
No 4 : Séries numériques



No 5 : Arrêt sur image



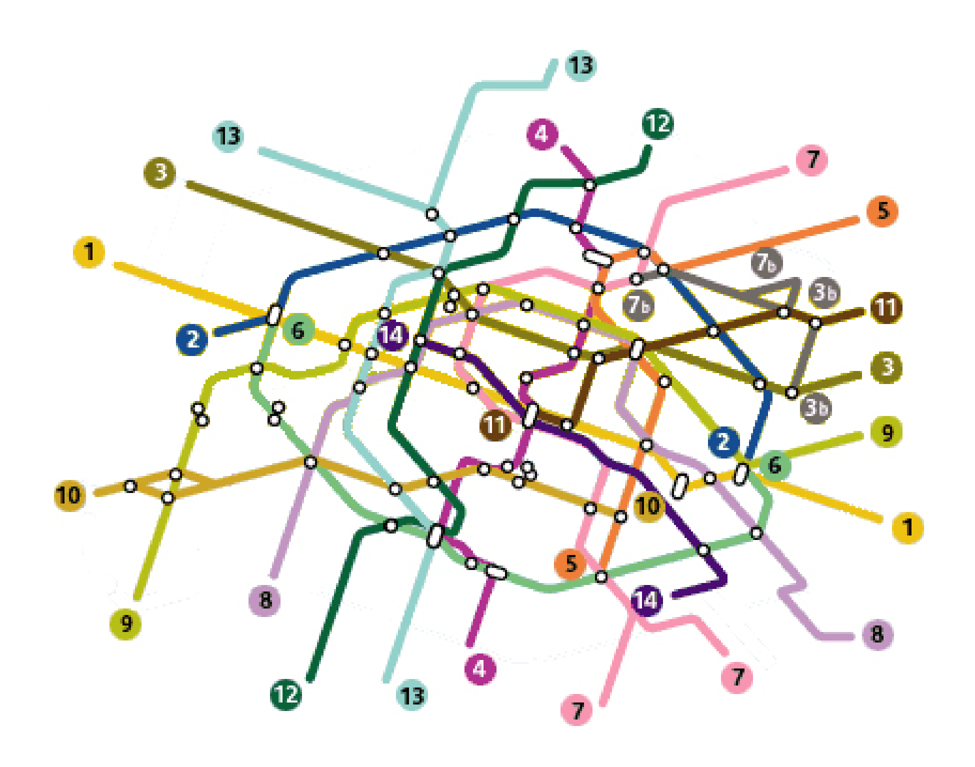
No 6 : Théorie des graphes



Introduction à la théorie des graphes

Solutions des exercices

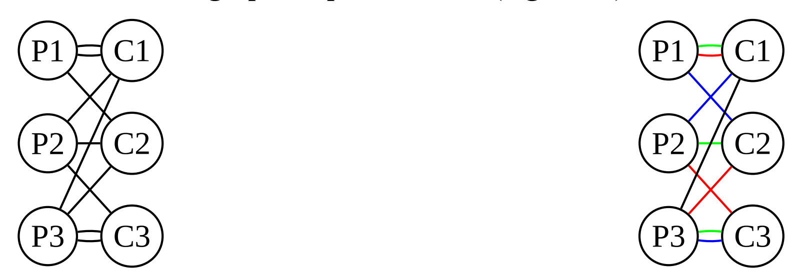
Didier Müller



Commission Romande de Mathématique

1 Graphes non orientés

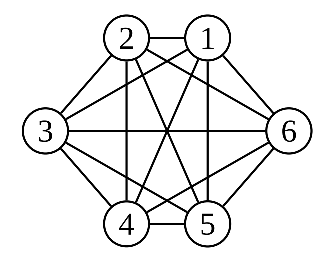
Exercice 1
On obtient le graphe biparti suivant (à gauche) :



En colorant les arêtes de ce graphe (1 couleur = 1 heure de l'horaire), en prenant garde que chaque sommet n'ait pas deux arêtes incidentes de même couleur, on obtient le résultat de droite. De ce graphe coloré, on tire l'horaire suivant :

	P1	P2	P3
1ère heure (rouge)	C1	C3	C2
2ème heure (vert)	C1	C2	C3
3ème heure (bleu)	C2	C1	C3
4ème heure (noir)			C1

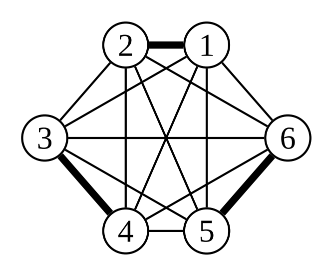
Exercice 2
On obtient le graphe complet K_6.

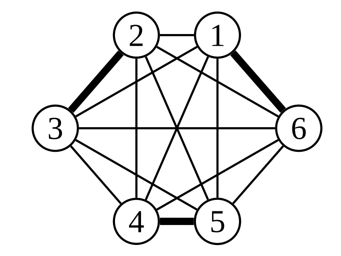


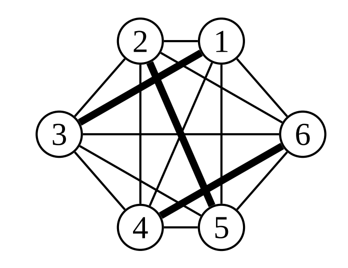
Il faudra 5 jours de tournoi. Voici un calendrier possible :

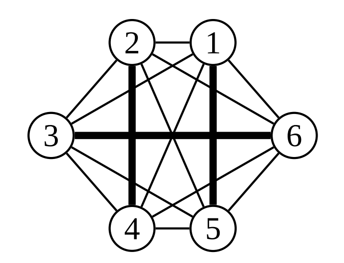
Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5

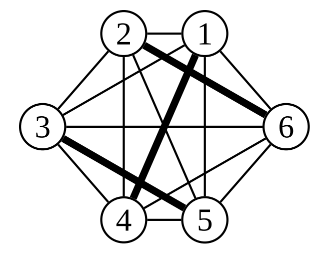
Ce calendrier a été construit d'après les cinq schémas ci-dessous :





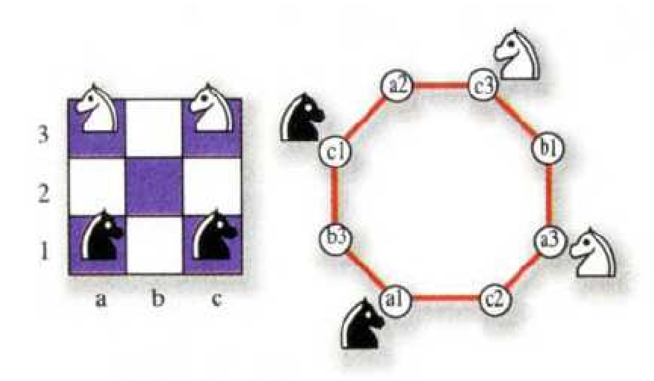






Exercice 3

On utilise le graphe qui indique les cases atteignables depuis une case courante.

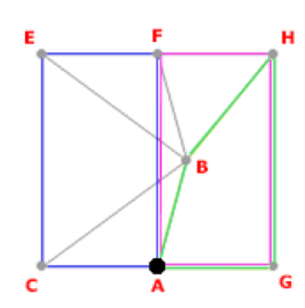


Les mouvements sont donc (par exemple) : c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3, c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3

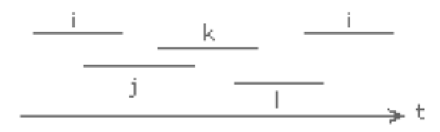
Exercice 4

Comme Holmes, dessinons un graphe avec les sommets A, B, C, E, F, G et H. Dans ce graphe, on relie deux sommets i et j si les suspectes i et j se sont rencontrées au château.

Pour découvrir laquelle des 7 femmes est venue plus d'une fois au château, il faut rechercher dans le graphe des cycles reliant quatre sommets, sans diagonale. En effet, un tel carré ijkl sans diagonale indique que l'une des quatre suspectes est nécessairement venue plus d'une fois au château.



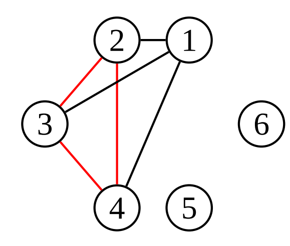
Pour s'en convaincre, on peut faire le petit schéma temporel ci-dessous :



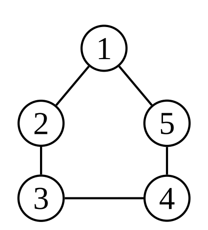
On voit que i a dû venir deux fois au château pour qu'un cycle sans diagonale apparaisse dans le graphe.

Le seul sommet commun à ces trois cycles est le sommet A. C'est donc Ann la coupable.

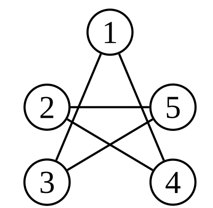
Exercice 5
Construisons un graphe dont les sommets représentent les six personnes ; deux sommets sont reliés par une arête noire lorsque les personnes se connaissent et rouge dans le cas contraire. Il s'agit de prouver que ce graphe contient une clique K_3 dont les arêtes sont de même couleur.
Si l'on ne tient pas compte de la couleur des arêtes, on obtient le graphe complet K_6. De chaque sommet partent cinq arêtes, et au moins trois d'entre elles sont de même couleur (noire ou rouge). Considérons la clique K_4 composée des sommets 1, 2, 3 et 4. Supposons, par exemple, que les arêtes (1, 2), (1, 3) et (1, 4) soient grises.



Considérons alors la clique K_3 composée des sommets 2, 3, 4. Si toutes ces arêtes sont rouges, c'est terminé : on a trois personnes qui ne se connaissent pas.
Si une de ces arêtes est grise, c'est aussi terminé : on a trois personnes qui se connaissent.
Par contre, dans un K_5, on peut trouver deux graphes partiels complémentaires sans K_3. On le voit sur les deux graphes partiels ci-dessous, dont la "superposition" donne le graphe complet K_5 :



"Se connaissent"



"Ne se connaissent pas"

Exercice 6
Soit $G = (V,E)$ un graphe simple. Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête (x,y) de E est comptée deux fois, une première fois pour $d(x)$ et une seconde fois pour $d(y)$. Donc, cette somme est finalement égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Remarque
Le lemme des poignées de mains reste valable pour les multigraphes avec boucles en convenant qu'une boucle contribue pour 2 dans le calcul du degré d'un sommet.

Exercice 7
Notons P l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair d'un graphe simple $G = (V,E)$. P et I forment une partition de V. D'après le **lemme des poignées de mains**, on a :

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2 \cdot |E| = \sum_{v\in P} d(v) + \sum_{v\in I} d(v)$$

Or $2 \cdot |E|$ et $\sum_{v \in P} d(v)$ sont des entiers pairs. $\sum_{v \in I} d(v)$ est également pair, puisque c'est la différence de deux entiers pairs. Or, chaque terme de la somme $\sum_{v \in I} d(v)$ est impair. Elle ne peut donc être paire que si le nombre de termes est pair. On a ainsi montré que le cardinal de I est un entier pair.

Exercice 8

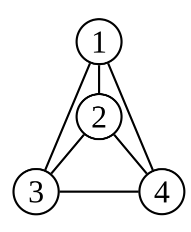
Si tout le monde a au moins un ami dans l'assemblée, cela signifie que tous les degrés des sommets sont compris entre 1 et $n-1$. Comme il y a n sommets, par le principe des tiroirs, il est certain qu'au moins deux ont le même degré, donc que deux personnes ont le même nombre d'amis.
Si une personne n'a aucun ami, le degré du sommet correspondant est 0. Les degrés des $n-1$ autres sommets sont compris entre 1 et $n-2$. Même conclusion que dans le premier cas.
Si plusieurs personnes n'ont pas d'amis, alors elles ont le même nombre d'amis, en l'occurrence 0 !

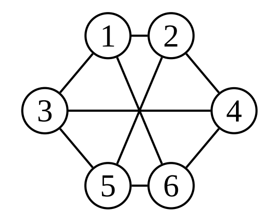
Exercice 9

Considérons le graphe simple dont les sommets représentent les 15 ordinateurs ; les arêtes représentent les liaisons entre ces ordinateurs. Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair. D'après le résultat établi dans l'exercice 7, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

Exercice 10

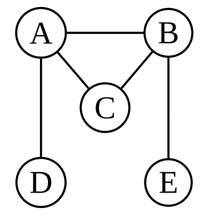
La figure ci-dessous montre deux graphes 3-réguliers (on dit aussi cubiques), ayant respectivement 4 et 6 sommets. En effet, on constate aisément qu'il n'existe pas de graphes cubiques ayant un nombre impair de sommets : le nombre d'arêtes d'un graphe cubique à n sommets est $\frac{3n}{2}$, qui n'est entier que lorsque n est pair.

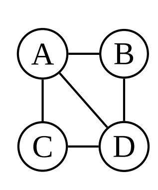


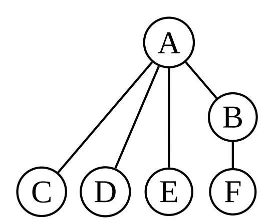


Exercice 11

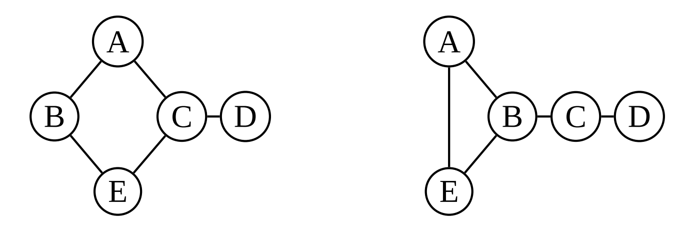
Les suites (3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 2, 2) et (4, 2, 1, 1, 1, 1) sont graphiques, comme le montrent les graphes ci-dessous :







Les graphes distincts ci-dessous correspondent tous deux à la suite (3, 2, 2, 2, 1) :



Exercice 12
Un problème survient avec les multigraphes, car plusieurs arêtes peuvent relier deux mêmes sommets.

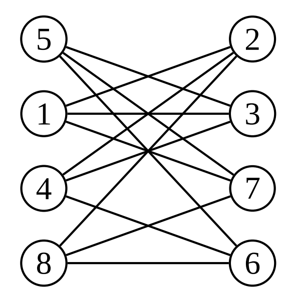
Exercice 13
Les graphes complets.

Exercice 14
Soit $G=(V,E)$ un graphe. On appellera coloriage d'un graphe G à k couleurs toute application ϕ de V dans $\{1, ..., k\}$. On dira qu'un coloriage ϕ est propre si deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.

Soit G un graphe biparti et ϕ un coloriage à 2 couleurs de G. Si $(x_0,\dots,x_n)$ est une chaîne, on a pour $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$, d'où $\phi(x_{2k}) = \phi(x_0)$ et $\phi(x_{2k+1}) = \phi(x_1)$. Maintenant, si cette chaîne est un cycle, on a $x_0 = x_n$, d'où $\phi(x_0) = \phi(x_n)$, ce qui implique que n est pair. G ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.

Soit maintenant $G=(V,E)$ un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. On doit construire un coloriage propre de G. Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où G est connexe : il suffira ensuite de recoller les applications.
Soit x_0 un sommet quelconque de V. Pour $x \in V$, on note $l(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x. On pose alors $\phi(x)=1$ si $l(x)$ est pair, $\phi(x)=2$ sinon. Soit $\{x,y\} \in E$: il est facile de voir que $|l(x)-l(y)| \leq 1$. Si on avait $l(x)=l(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2l(x)+1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x,y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire. On a donc $|l(x)-l(y)|=1$, donc $l(x)$ et $l(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $\phi(x) \neq \phi(y)$. Le coloriage est donc bien propre.

Exercice 15
Tous les cycles sont pairs. On peut le dessiner ainsi :



Exercice 16

Soit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Construisons la suite de graphes $G_i = (V, E_i)$ avec $E_0 := \oslash$ et $E_i := E_{i-1} \cup \{e_i\}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Le théorème est vrai pour G_0 car $m = 0$, $p = n$ et $\nu(G_0) = 0 - n + n = 0$.

Supposons le théorème vrai pour G_i et étudions G_{i+1}. Deux cas peuvent se présenter :

a. L'arête $e_{i+1} = \{a, b\}$ a ses extrémités dans deux composantes connexes distinctes de G_i, alors G_{i+1} aura $m_{i+1} = m_i + 1$ arêtes, n sommets et $p_{i+1} = p_i - 1$ composantes connexes donc : $\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = (m_i + 1) - n + (p_i - 1) = m_i - n + p_i = \nu(G_i) \geq 0$

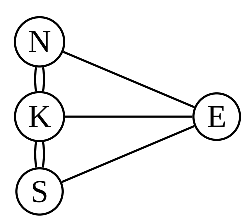
b. L'arête $e_{i+1} = \{a, b\}$ a ses extrémités dans la même composante connexe de G_i, alors G_{i+1} aura $m_{i+1} = m_i + 1$ arêtes, n sommets et $p_{i+1} = p_i$ composantes connexes donc : $\nu(G_{i+1}) = m_{i+1} - n + p_{i+1} = (m_i + 1) - n + p_i = m_i - n + p_i + 1 \geq \nu(G_i) \geq 0$

Ainsi, dans les deux cas, on a $\nu(G_{i+1}) \geq \nu(G_i)$.

On constate dans cette construction, que dès que $\nu(G_i)$ devient plus grand que 0, on a un cycle dans G.

Exercice 17

Non. Le graphe correspondant n'est ni eulérien, ni semi-eulérien :



Les sommets représentent les quatre régions de la ville (Nord, Kneiphof, Est, Sud) et les arêtes les ponts reliant deux régions adjacentes .

Exercice 18

Un graphe est eulérien s'il est connexe et si tous ses sommets sont de degré pair. Il est semi-eulérien si tous ses sommets sauf deux sont de degré pair ; les chaînes eulériennes du graphe auront alors ces deux sommets pour extrémités.

Exercice 19

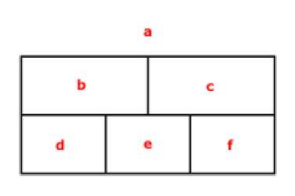
Le graphe de gauche n'est évidemment pas eulérien puisque non connexe. Celui du milieu est eulérien car tous les sommets sont de degré pair. Celui de droite est semi-eulérien, car seuls deux sommets sont de degré impair.

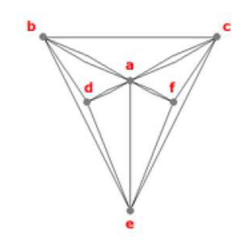
Exercice 20

Oui. Comme le nombre de sommets de degré impair est toujours pair, il suffit de relier le nouveau sommet à tous les sommets de degré impair. Tous les sommets seront alors de degré pair, et le graphe sera donc eulérien.

Exercice 21

Non, car le graphe correspondant n'est pas eulérien. Pour construire ce graphe, on a représenté les régions délimitées par des cloisons par les sommets ; les sommets x et y sont reliés si les régions x et y sont séparées par une cloison. Chaque cloison correspond donc à une arête du graphe.

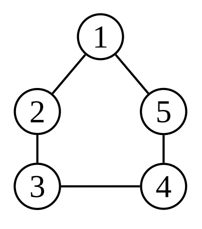




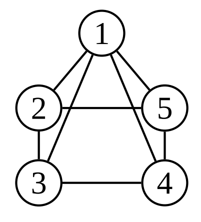
Exercice 22
Réponses aux quatre questions :

1) Les dominos sont au nombre de 4 + 3 + 2 + 1 = 10 : 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5.
2) Considérons maintenant le graphe complet K_5 à 5 sommets numérotés de 1 à 5. Ce graphe possède 10 arêtes, chaque arête correspondant à une paire de sommets distincts, c'est-à-dire à un domino. Former une boucle fermée avec ces dominos revient donc à trouver un cycle eulérien (passant par toutes les arêtes, donc utilisant tous les dominos) dans K_5. Une solution possible est la suivante : 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1, 1-3, 3-5, 5-2, 2-4, 4-1.
3) Les dominos doubles peuvent être insérés sans difficulté dans cette suite. En terme de graphes, les dominos doubles correspondent à une boucle sur un sommet et cette boucle peut être parcourue lorsqu'on atteint le sommet en question.
4) Si l'on considère le même problème avec des faces numérotées de 1 à n, on doit raisonner sur le graphe complet à n sommets. Or, nous savons qu'un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et ne possède que des sommets de degré pair. Dans le cas des graphes complets, cela n'est vrai que si le nombre de sommets est impair.

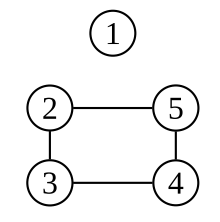
Exercice 23
Par exemple :



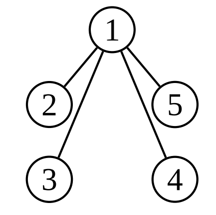
Hamiltonien et eulérien



Hamiltonien et non eulérien



Non hamiltonien et eulérien



Non hamiltonien et non eulérien

Exercice 24
Réponses aux quatre questions :

1) Désignons par les chiffres de 1 à 9 les 9 personnes et considérons le graphe complet K_9 à 9 sommets. Une composition de la table correspond à un cycle hamiltonien de K_9 (un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet). Si deux compositions de table correspondent à deux cycles ayant une arête commune, cela signifie que les deux personnes reliées par cette arête se retrouvent côte à côte. Ainsi, le problème revient à déterminer le nombre de cycles hamiltoniens disjoints de K_9. Le graphe K_9 possédant $9 \cdot 8 \div 2 = 36$ arêtes et chaque cycle utilisant 9 arêtes, ce nombre est au maximum égal à 4.

2) Il vaut effectivement 4, comme le prouvent les 4 cycles hamiltoniens disjoints suivants : 1,2,3,9,4,8,5,7,6 - 1,3,4,2,5,9,6,8,7 - 1,4,5,3,6,2,7,9,8 - 1,5,6,4,7,3,8,2,9

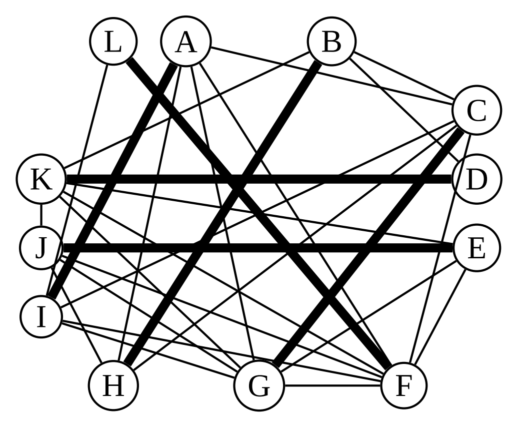
3) Avec trois tables de 3, chaque ensemble doit correspondre à trois triangles.

4) (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9) - (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) - (1,5,9)(2,6,7)(3,4,8) - (1,6,8)(2,4,9)(3,5,7)

Exercice 25
Il s'agit de trouver des cycles hamiltoniens dans le **complémentaire** du graphe, c'est-à-dire dans le graphe précisant les compatibiltés entre les personnes.
En voici un : B, C, H, A, F, G, E, D.

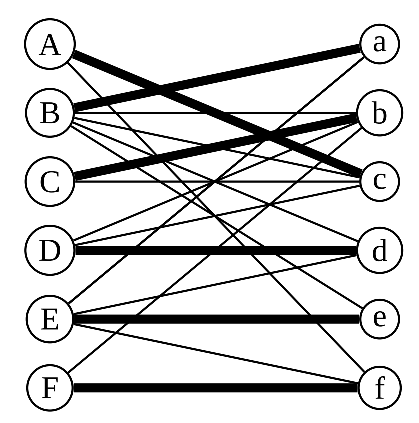
Le graphe complémentaire d'un graphe simple G est un graphe simple H ayant les mêmes sommets et tel que deux sommets de H soient adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G.

Exercice 26
On cherche un couplage optimal dans le graphe ci-dessous (qui représente les binômes possibles) :



On peut donc former 6 binômes.

Exercice 27
On cherche un couplage optimal dans le graphe biparti ci-dessous (qui représente les couples possibles) :



On voit facilement qu'il existe un couplage parfait. On peut donc former six couples.

Exercice 28
Étant donnée une carte connexe C, supposons qu'elle n'ait qu'un sommet P. Alors S=1 et A=0, il n'y a qu'une région, donc R=1. Ainsi $S-A+R=2$. D'autre part, C peut être construite à partir d'un seul sommet à l'aide des constructions suivantes :

(1) Ajouter un nouveau sommet Q_2 et le relier à un sommet existant Q_1, par une arête qui n'en croise aucune autre.

(2) Relier deux sommets existants Q_1 et Q_2 par une arête a qui n'en croise aucune autre.

L'opération (1) ne change pas la valeur de $S-A+R$, puisque S et A sont augmentés de 1 et que R n'est pas modifié. L'opération (2) ne change pas non plus la valeur de $S-A+R$, car S est inchangé alors que A et R sont augmentés de 1. En conclusion, la carte C doit avoir la même valeur $S-A+R$ que la carte qui n'a qu'un seul sommet, à savoir 2, et la formule est démontrée.

Exercice 29
On remarque que $K_{3,3}$ a 6 sommets et 9 arêtes. Supposons que $K_{3,3}$ soit planaire. D'après la formule d'Euler, la représentation planaire a 5 régions (6-9+5=2). Il n'y a pas de cycle de longueur 3 dans le graphe, donc le degré de chaque région doit être supérieur ou égal à 4, et la somme des degrés des régions doit être supérieure ou égale à 20. Comme la somme des degrés des régions d'une carte connexe est égale à deux fois le nombre d'arêtes (théorème 1.7), le graphe doit avoir au moins 10 arêtes. Or, $K_{3,3}$ a 9 arêtes. Ce graphe n'est donc pas planaire.

Exercice 30
M^2 indique le nombre de chaînes de longueur 2 entre les sommets i et j. M^3 indique le nombre de chaînes de longueur 3 entre les sommets i et j.

Exercice 31
Matrice et listes d'adjacences :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

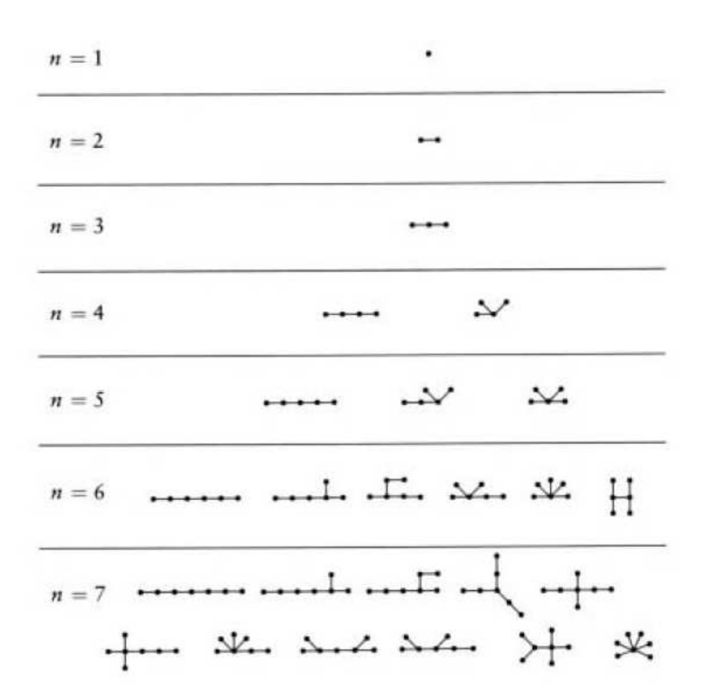
1 : 2, 4, 6
2 : 1, 4, 5, 6, 7
3 : 4
4 : 1, 2, 3, 5, 6
5 : 2, 4
6 : 1, 2, 4
7 : 2

Exercice 32
Ce théorème se démontre en utilisant systématiquement le théorème 1.3.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) par définition
(2) $\Leftrightarrow$ (3)
$\nu(G)=0$ et $p=1 \Rightarrow m=\nu(G)+n-p=n-1$. Réciproquement $m=n-1$ et $\nu(G)=0$ entraîne $p=n-(n-1)=1$, donc G est connexe.
(3) $\Leftrightarrow$ (4)
$\nu(G)=0$ et $m=n-1 \Rightarrow$ p = $\nu(G)-m+n=0-(n-1)+n=1$. Réciproquement, $p=1$ et $m=n-1$ entraîne $\nu(G)=0$, donc G est sans cycle.
(4) $\Rightarrow$ (5)
$m=n-1$ et $p=1 \Rightarrow \nu(G)=0 \Rightarrow G$ est sans cycle (et donc sans boucle).

G connexe $\Rightarrow$ chaque paire $\{u,v\}$ de sommets distincts est reliée par une chaîne simple.
G est sans cycles $\Rightarrow$ chaque paire $\{u,v\}$ est reliée par une seule chaîne simple.
(5) $\Rightarrow$ (2)
Si chaque paire $\{u,v\}$ de sommets distincts de G est reliée par une seule chaîne simple, le graphe est en tout cas connexe et ne peut contenir de cycles simples, puisque chaque cycle simple peut être vu comme étant la concaténation de deux chaînes aux arêtes disjointes et aux extrémités communes. Donc G est un arbre.

Exercice 33
Le théorème est vrai pour $n=2$ sommets, car les deux sommets sont des feuilles.
Supposons qu'il soit vrai pour $n-1$ sommets $(n>2)$. Si on veut ajouter un sommet, on peut le relier à l'arbre existant avec une arête (sinon on forme un cycle) soit à une feuille, soit à un sommet qui n'est pas une feuille. Dans le premier cas, le nombre de feuilles reste le même (une disparaît et une apparaît) ; dans le second cas, le nombre de feuilles augmente de 1.
Le théorème est donc vrai pour n sommets, puisque l'on ne peut pas faire diminuer le nombre de feuilles par l'ajout d'un sommet.

Exercice 34
La figure ci-dessous montre tous les arbres possibles qui ont entre 1 et 7 sommets. On voit qu'il y a 3 arbres différents à 5 sommets, 6 à 6 sommets et 11 à 7 sommets.



Exercice 35
Si un arbre a un couplage parfait, toutes les feuilles sont saturées (forcément). Colorons en noir les arêtes du couplage. On peut construire un couplage parfait dans un arbre ainsi :

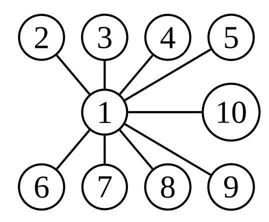
1. On colore toutes les arêtes touchant une feuille en noir. Si plus d'une arête noire touche un même sommet, alors il n'y a pas de couplage parfait : STOP
2. On enlève les sommets saturés et les arêtes adjacentes.
3. Tant qu'il y a des sommets, allez en 1.

Ce procédé ne peut donner qu'un seul couplage parfait, s'il y en a un.

Etant donné un graphe G, notons $imp(G)$ le nombre de composantes connexes d'ordre impair de G. Pour qu'un arbre ait un couplage parfait, il faut $imp(G-v)$=1 pour tout sommet v.

Exercice 36
$S = \{2,3,3,5,5,7,7,9\}$

Exercice 37
On obtient une étoile :



Exercice 38
Un codage de Prüfer est une liste ordonnée de $n-2$ nombres compris entre 1 et n, avec répétitions possibles des nombres. Il y a n nombres possibles pour la première place dans la liste, n pour la 2ème, n pour la 3ème, etc. En tout, il y a donc n^{n-2} listes possibles, donc n^{n-2} arbres différents à n sommets numérotés.

Exercice 39
Il y a 8 arbres couvrants.

Exercice 40
Il y a 5 arbres maximaux possibles.

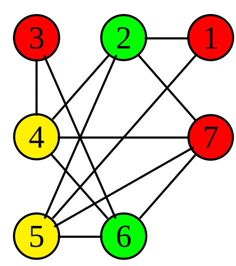
Exercice 41
G contient plusieurs cliques d'ordre 3, donc $\gamma(G) \geq 3$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables : $S_1 = \{v_1, v_4\}, S_2 = \{v_2, v_6, v_7\}, S_3 = \{v_3, v_5\}$. Donc $\gamma(G) \leq 3$, car à chaque stable correspondra une couleur.
On en déduit que $\gamma(G) = 3$.

Exercice 42
Réponses aux trois questions :

1. Il faudra 3 couleurs.
2. Oui, le graphe est semi-eulérien.
3. Oui, le graphe est semi-hamiltonien.

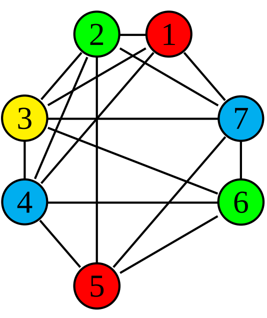
Exercice 43
On construit d'abord le graphe des rencontres : les sommets représentent les élèves ; une arête (i, j) signale que les élèves i et j se sont rencontrés.
Il reste alors à proposer une coloration du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs. Chaque couleur correspondra à une place assise. La coloration montre que la bibliothèque dispose d'au moins quatre places assises, car le graphe contient une clique à quatre sommets (B-E-F-G). Ces quatre places assises sont suffisantes.

Exercice 44
Construisons le graphe G dont les sommets sont les agences numérotées de 1 à 7, une arête reliant deux sommets lorsque les deux agences correspondantes proposent au moins un lieu identique.
On arrive à trouver une 3-coloration des sommets (voir ci-dessous). Chaque couleur correspondra à un jour de la semaine.



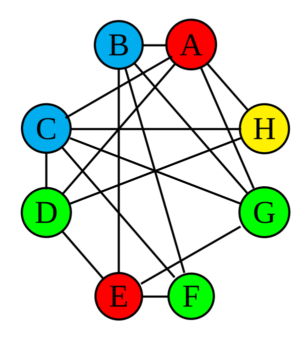
1er jour (rouge) : excursions des agences 1, 3 et 7.
2ème jour (vert) : excursions des agences 2 et 6.
3ème jour (jaune) : excursions des agences 4 et 5.

Exercice 45
Construisons le graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête reliant deux sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs.



Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une k-coloration de G avec $k = \gamma(G)$:
G possède une clique d'ordre 4 (de sommets 1, 2, 3, 4), donc $\gamma(G) \geq 4$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables :
$S_1 = \{1,5\}, S_2 = \{2,6\}, S_3 = \{3\}, S_4 = \{4,7\}$, d'où $\gamma(G) \leq 4$.
On en déduit que $\gamma(G) = 4$.
Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :
1ère période (rouge) : épreuves des cours 1 et 5.
2ème période (vert) : épreuves des cours 2 et 6.
3ème période (jaune) : épreuve du cours 3.
4ème période (cyan) : épreuves des cours 4 et 7.

Exercice 46
Construisons le graphe X dont les sommets sont les huit produits chimiques tel que deux de ses sommets sont reliés lorsque les produits associés à ces sommets ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon. Le nombre minimum de wagons est égal au nombre chromatique de ce graphe.
X contient une clique d'ordre 4 (de sommets A, C, D, H), donc $\gamma(X) \geq 4$.
Déterminons une partition des sommets de X en sous-ensembles stables : $S_1 = \{A,E\}, S_2 = \{B,C\}, S_3 = \{D,F,G\}, S_4 = \{H\}$. Donc $\gamma(X) \leq 4$.



On en déduit que $\gamma(X) = 4$. Il faudra donc 4 wagons.

Exercice 47

Réponses aux trois questions :

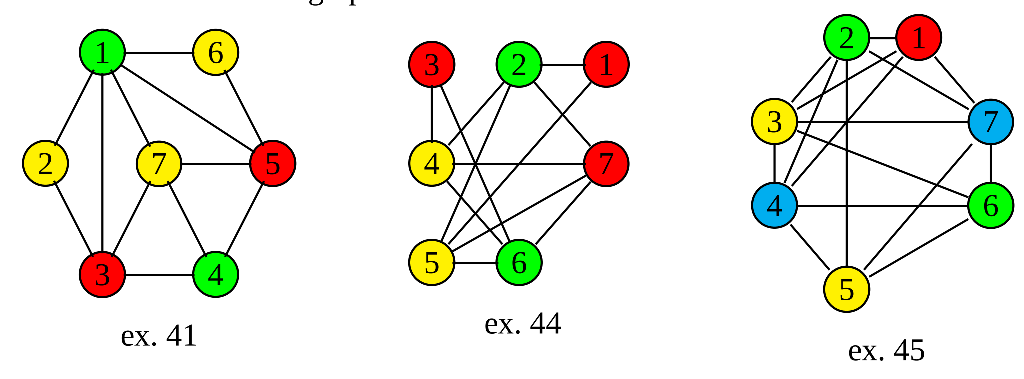
1. Il suffit de considérer un cycle ayant un nombre impair de sommets.
2. Si l'on rajoute à ce graphe un sommet relié à tous les sommets du cycle, on obtient un graphe de nombre chromatique 4 ne contenant pas de K_4.
3. On peut itérer cette construction de façon à obtenir, pour tout n, un graphe de nombre chromatique n ne contenant pas de K_n.

Exercice 48

Résoudre un Sudoku classique revient à colorer un graphe à 81 sommets (un sommet correspondant à une case) avec 9 couleurs, certains sommets étant colorés au départ. Ce graphe a 810 arêtes, chaque case (sommet) étant reliée aux 8 autres de sa colonne, aux 8 autres de sa ligne et aux 8 autres de sa région (4 sont déjà comptées), ce qui fait bien (81·(8+8+4))/2 = 810 arêtes.

Exercice 49

Les colorations des trois graphes :



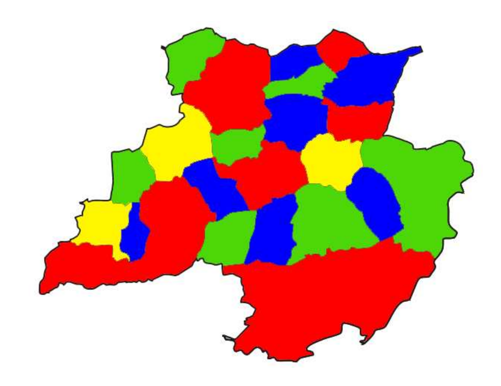
ex. 41 ex. 44 ex. 45

Exercice 50

Il faudra 3 couleurs au minimum. L'algorithme de Welsh et Powell donne la coloration en 3 couleurs ci-après.



Exercice 51
Il y a beaucoup de colorations possibles... avec 4 couleurs au minimum.



Exercice 52
Il s'agit de colorer avec le minimum de couleurs les graphes complets à 3, 4, 5 et 6 sommets. Les sommets représenteront les joueurs, les arêtes les matches et les couleurs les heures des matches.
On peut colorer les arêtes de K_3 et K_4 avec trois couleurs. Il faudra donc au minimum trois heures.
On peut colorer les arêtes de K_5 et K_6 avec cinq couleurs. Il faudra donc au minimum cinq heures.

Exercice 53
On peut faire "disparaître" entièrement le graphe en éliminant successivement les sommets simpliciaux $v_1, v_7, v_8, v_6, v_2, v_3, v_4, v_5$. Le graphe est donc triangulé.

Exercice 54
Tous ces types de graphes possèdent un schéma d'élimination parfait. Ils sont donc triangulés.

Exercice 55
En reprenant le schéma d'élimination parfait de l'ex. 53, on colorie les sommets en lisant la liste de droite à gauche et on met à chaque fois la couleur la plus petite possible, ce qui donne : $v_5 \to 1,\ v_4 \to 2,\ v_3 \to 3,\ v_2 \to 4,\ v_6 \to 2,\ v_8 \to 1,\ v_7 \to 3,\ v_1 \to 1$.

2 Graphes orientés

Exercice 56
Elémentaire... Ne pas oublier les boucles sur les sommets.

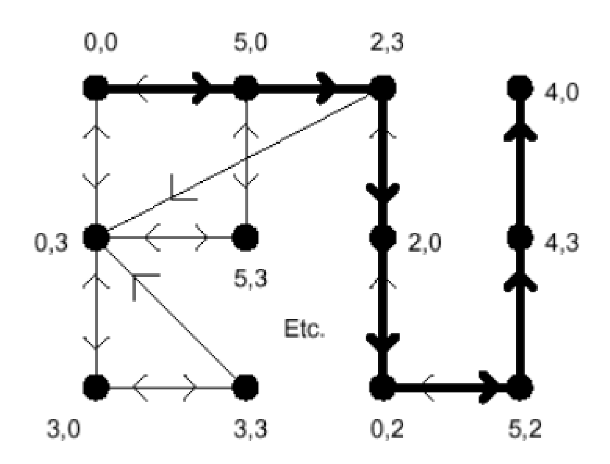
Exercice 57
Degrés des sommets :
$d^+(1) = 3, d^-(1) = 0, d(1) = 3$
$d^+(2) = 2, d^-(2) = 2, d(2) = 4$
$d^+(3) = 1, d^-(3) = 0, d(3) = 1$
$d^+(4) = 1, d^-(4) = 3, d(4) = 4$
$d^+(5) = 0, d^-(5) = 2, d(5) = 2$
$d^+(6) = 1, d^-(6) = 1, d(6) = 2$

Exercice 58
Conditions nécessaires :

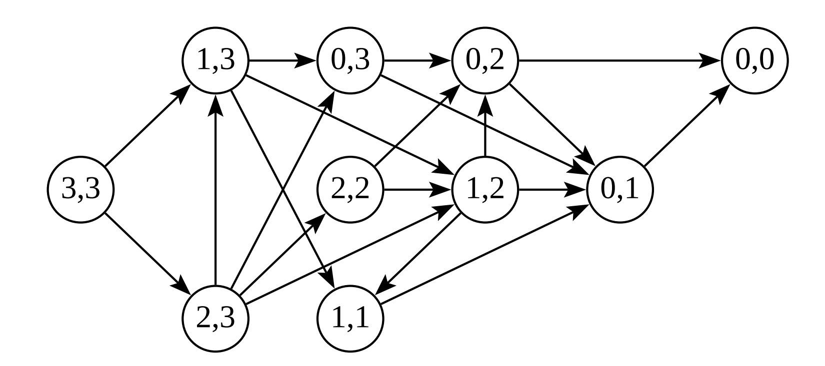
- Chaque sommet doit avoir un degré intérieur (entrant) égal à 2 (chaque lapin a deux parents) à l'exception de deux sommets pour lesquels le degré intérieur est nul (ces sommets correspondent aux Adam et Ève de notre groupe de lapins).
- Le graphe doit être sans circuit (on dit également acyclique). En effet, un lapin ne peut avoir pour parent l'un de ses descendants...
- On doit pouvoir colorer les sommets de ce graphe en deux couleurs (mâle et femelle), de façon telle que tout sommet de degré intérieur égal à 2 possède un prédécesseur mâle et un prédécesseur femelle.

Il est possible que d'autres conditions soient nécessaires mais mes connaissances sur la reproduction chez les lapins ne me permettent pas d'aller plus loin... (nombre de portées possibles, nombre de petits lapins par portée, etc.)

Exercice 59
Les étiquettes des sommets sont des couples donnant respectivement le contenu du récipient de 5 litres et celui du récipient de 3 litres. On place un arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration à l'autre. On cherche alors un chemin du sommet 0, 0 au sommet 4, 0...
La figure ci-après montre un tel chemin (le digraphe n'est pas représenté en entier).
Il y a d'autres solutions que celle présentée ci-dessous.



Exercice 60
Le jeu avec deux tas de trois allumettes est décrit par le graphe ci-dessous. On ne distingue pas les deux tas (par exemple 2,1 = 1,2).



Le joueur qui atteint la configuration 0,0 perd la partie. Pour gagner, on doit donc absolument atteindre la configuration 0,1. On peut vérifier qu'en jouant 1,3 au premier coup, on peut toujours ensuite atteindre 0,1 en deux étapes : 1,3 - 0,3 - 0,1 ou 1,3 - 1,2 - 0,1 ou enfin 1,3 - 1,1 - 0,1. Le coup gagnant au départ est donc « enlever 2 allumettes dans un tas ».

Exercice 61
Réponses aux questions 1 et 3 :
1. Il n'y a que deux tournois et tous les deux ont un chemin hamiltonien.
3. Preuve par induction.

Exercice 62
Soit x un sommet d'un tournoi T. Si x n'est pas un roi, alors un sommet y n'est pas atteignable à partir de x par un chemin de longueur au plus 2. Donc, aucun successeur de x n'est un prédécesseur de y. Cela signifie que chaque successeur de x doit être un successeur de y et que x est un successeur de y. Donc $d^+(y) > d^+(x)$. Si y n'est pas un roi, on peut répéter l'argument pour trouver un sommet z ayant un degré extérieur plus grand. Comme T est fini, ce processus devra se terminer une fois et nous aurons forcément trouvé un roi.

Exercice 63
Soit x et y deux sommets d'un digraphe connexe $G = (V, E)$. L'algorithme de Moore calcule la distance $d(x; y)$. On étiquette les sommets de G en observant les règles suivantes :

1. le sommet x reçoit l'étiquette 0
2. on choisit un arc $(u, v) \in E$, où u est déjà étiqueté k :
   i. si v n'est pas étiqueté, alors v reçoit l'étiquette $k+1$
   ii. si v est étiqueté p, alors l'étiquette de v est remplacée par $min(p; k+1)$

   puis on biffe cet arc.

L'algorithme s'arrête lorsque tous les arcs ont été biffés. L'étiquette de chaque sommet donne sa distance par rapport au somet x.
L'algorithme de Moore permet aussi d'exhiber de façon récursive les chemins de longueur k de x à y : on part de y et on détermine les sommets z tels que $(z, y) \in E$ avec $d(x; z) = k-1$ et ainsi de suite jusqu'à x.

Exercice 64
Algorithme de marquage

1. On marque un sommet s quelconque avec le symbole "$\pm$".
2. On marque avec le symbole "+" tous les sommets que l'on peut atteindre depuis s en suivant les arcs dans le sens des flèches.
3. Si certains sommets ne sont pas marqués par "+" alors STOP, car le graphe n'est pas fortement connexe.
4. On marque avec le symbole "-" tous les sommets que l'on peut atteindre depuis s en suivant les arcs dans le sens inverse des flèches.
5. Si tous les sommets sont marqués "$\pm$", alors le graphe est fortement connexe.

Le premier digraphe est fortement connexe, car tous les sommets ont pu être marqués "$\pm$". Par contre, le deuxième digraphe n'est pas fortement connexe. Pour trouver les composantes fortement connexes, on suit la procédure suivante :

a. Appliquer l'algorithme de marquage énoncé ci-dessus.
b. Supprimer les sommets marqués d'un "$\pm$" : ils forment une composante fortement connexe.
c. Tant qu'il reste des sommets, aller en a.

Composantes fortement connexes du deuxième digraphe : {1, 2, 5, 6}, {9, 10, 13, 14}, et {3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16}.

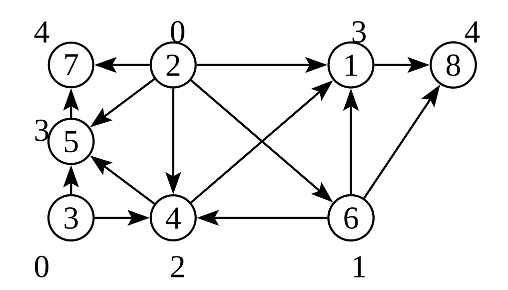
Exercice 65
M^2 indique le nombre de chemins de longueur 2 entre les sommets i et j. M^3 indique le nombre de chemins de longueur 3 entre les sommets i et j.

Exercice 66

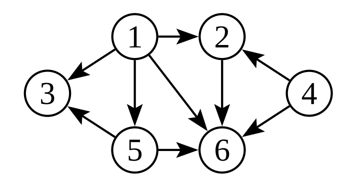
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 : 6
2 : 1, 4, 5, 6, 7
3 : 4
4 : 1, 5
5 : -
6 : 4
7 : -

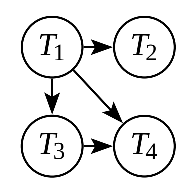
Exercice 67
On obtient les rangs ci-dessous :



Exercice 68
Le premier graphe admet une orientation transitive :



Exercice 69
Réponses aux deux questions :
1. On obtient un graphe de comparabilité :



2. Le nombre minimum de véhicules est le nombre minimum de chemins passant par tous les sommets du graphe.

Exercice 70
Corrigé abrégé :
1. Oui. Preuve par induction.
2. M_1 est préféré à toutes les autres marques. Il est impossible que deux marques aient été préférées au même nombre d'autres marques.
3. Si le graphe contient un circuit, il n'existe pas toujours une marque préférée à toutes les autres (on peut facilement trouver un contre-exemple dans un K_4). Par contre, on peut prouver par induction que le deuxième cas est toujours vrai.

Exercice 71
Corrigé en partant du sommet 3 :

Initialisation
$S = \{3\}; T = \{1,2,4,5\}; \lambda = (\infty,3,0,2,\infty); p = (NIL,3,NIL,3,NIL)$

1ère itération
$i = 4$ car $\lambda(4) = min(\infty,3,2,\infty) = 2$;
$S = \{3,4\}; T = \{1,2,5\}$;
les successeurs de 4 dans T sont 1 et 2 ;
$\lambda(1)$ prend la nouvelle valeur $min(\infty;\lambda(4)+\delta(4;1)) = min(\infty;2+10) = 12$; $p(1) = 4$;
$\lambda(2)$ garde sa valeur car $min(3;\lambda(4)+\delta(4;2)) = min(3;2+3) = 3$; $p(2) = 3$;
d'où les nouveaux vecteurs $\lambda = (12,3,0,2,\infty)$ et $p = (4,3,NIL,3,NIL)$

2e itération
$i = 2$ car $\lambda(2) = min(12,3,\infty) = 3$;
$S = \{2,3,4\}$; $T = \{1,5\}$;
2 n'a pas de successeur dans T ;
d'où les vecteurs $\lambda = (12,3,0,2,\infty)$ et $p = (4,3,NIL,3,NIL)$

3e itération
$i = 1$ car $\lambda(1) = min(12,\infty) = 12$;

$S = \{1,2,3,4\}$; $T = \{5\}$;
le seul successeur de 1 dans T est 5 ;
$\lambda(5) = min(\infty;\lambda(1)+\delta(1;5)) = min(\infty;12+4) = 16$; p(5) = 1
d'où les vecteurs $\lambda = (12,3,0,2,16)$ et $p = (4,3,NIL,3,1)$

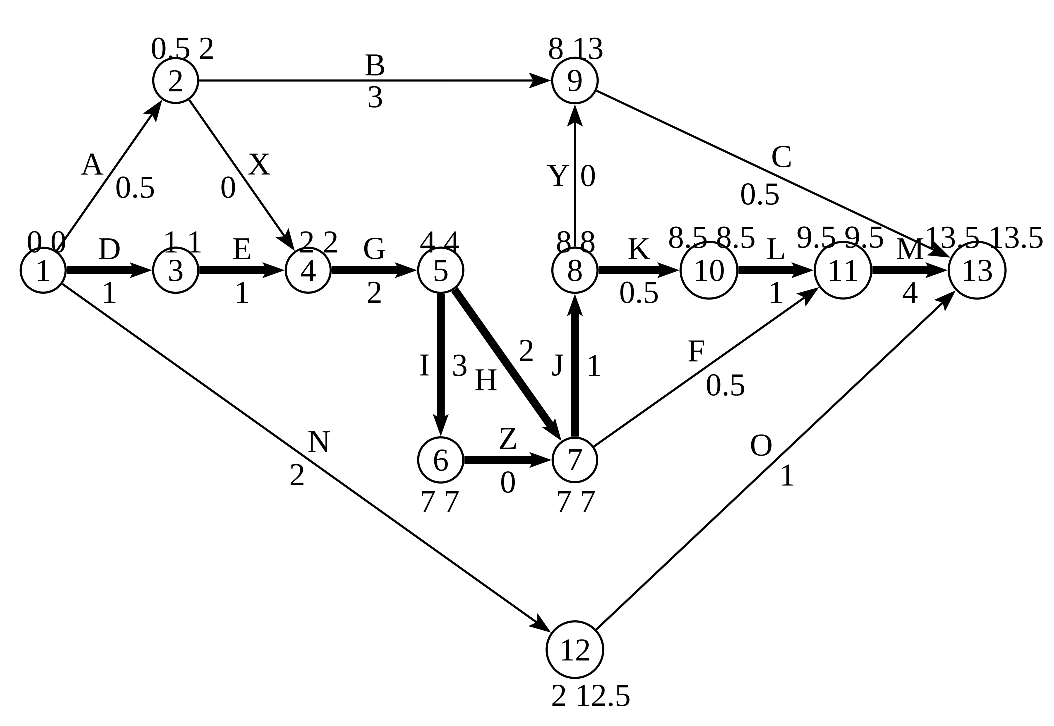
4e itération
$i = 5$; $\lambda(5) = 16$;
$S = \{1,2,3,4,5\}$; $T = \{\}$; FIN.
$\lambda = (12,3,0,2,16)$

Exercice 72
Avec des arcs de poids négatif, on risque d'avoir des circuits de longueur négative. Dans un pareil cas, il n'y a pas de plus court chemin, car plus on parcourt le circuit, plus le chemin est court !

Exercice 73
Vérifiez que vous avez obtenu le même graphe que dans l'exemple.

Exercice 74
Le chemin critique est A-E-H-J. La durée minimale des travaux est de 17 jours.

Exercice 75
On a dû introduire les tâches fictives X, Y et Z de durée nulle, pour respecter les précédences.
1.



2. La durée minimale des travaux est de 13.5 jours. Le chemin critique est constitué des tâches D, E, G, I, J, K, L et M. La tâche H est aussi une tâche critique.